

平面几何解题过程中加工水平对迁移的影响*

杨卫星

张梅玲

(聊城师范学院教育工程系, 聊城 252059)

(中国科学院心理研究所, 北京 100101)

摘要 通过实验研究, 平面几何靶题难度以及解题者对靶题与源题之间存在着共性关系的加工水平对解题迁移的影响得到了验证。结果表明, 解题者对具有内在联系的先后问题之间共性关系的加工水平是影响解题迁移的因素之一; 靶题的难度太大或太小, 将导致解题者对先后问题之间共性关系的加工作用失败而出现地板效应和天花板效应, 且靶题难度与加工水平在影响解题迁移时有交互作用。

关键词 迁移, 平面几何, 问题难度, 共性关系, 加工水平。

分类号 B849: G44

1 问题的提出

迁移与学习是不可分的, 有学习便有迁移。解题即问题解决 (problem-solving), 是学习的基本方式之一, 先前的解题与后继的解题都属于学习。先前的解题学习对后继的解题学习的影响即为解题迁移 (problem-solving transfer)。解题记忆 (problem-solving memories) 对解题迁移有重要影响, 解题方法、解题思路、解题技能等都有迁移作用^[1]。解题技能对解题迁移乃至问题解决的影响是近年来认知心理研究的热点之一。

关于问题分类的知识包括有关原理、概念、关系、程序、规则、运算等, 这些知识相互联系的整体就叫做问题类型图式^[2]。Bassok 和 Holyoak 研究发现, 图式归纳是影响解题迁移的一个重要因素。图式即对两个或两个以上问题及其解答的概括化。图式包括一些相关问题的部分一致性成分, 它作为提供类似解答的中介, 有利于解题的迁移。

为使迁移发生, 解题者必须明确先前问题的哪些特征可以适当地应用于后继的迁移任务。解题者若要在前后两个问题的学习之间获得迁移, 那么这两个学习活动之间应有共同成分存在。这些成分既可以存在于材料中 (问题本身), 也可以存在于学习者的认知结构中。学习问题 (源问题) 与迁移问题 (靶题) 之间的共同成分, 可以分为结构成分和表面

成分。结构成分是指学习任务中与最终所要达到的目标或结果有关的成分; 表面成分是指学习任务中与最终目标的获得无关的成分。

在解题迁移过程中, 解题者注意到两个问题情境的突出特征是非常重要的, 然而知觉相似性不能简单地依靠两种情境的物理特征来决定。知觉相似性受很多因素的影响, 如解题者个人与迁移问题有关的专业知识, 解决某类问题的经验及将问题进行比较的意识等。

在学习过程中, 学生学习的困难很多情况下不是来自学习内容本身, 而是由于学习者缺乏某种意识。有很多简单的问题, 由于缺乏意识的参与而变得困难了。然而长期以来教育心理学却对这个问题的研究有所忽视。

关于意识 (awareness) 在解题迁移过程中的作用问题, 近期的很多研究都已涉及, 但有些研究结论还存在着异议。如 Gick 和 Holyoak^[3,4] 发现, 先让被试学习一个分散兵力攻克堡垒的军事问题 (分散兵力进攻堡垒以避免伤亡过重), 然后让他们解决 Duncker 的辐射肿瘤问题 (使射线从不同的角度射向肿瘤以避免伤害身体的其他组织)。当不告诉被试两个问题有共性时, 迁移量很低; 要求被试描述两个不同领域中类似问题之间的共性, 可以获得较大的迁移^[5,6]。这说明, 对两个问题之间共性关系的意识及加工水平影响了迁移。Reed, Dempster 和

本文初稿收到日期: 1999-06-10, 修改稿收到日期: 1999-12-20。

* 本研究属国家自然科学基金资助重点项目“儿童认知能力发展和促进的研究”部分工作 (项目批准号: 39730180)。

Ettinger 用解代数应用题做实验发现, 尽管给被试提供了解题经验, 并告诉他们先前解过的题对后来的解题有帮助, 还是没有发生迁移^[5]; Sweller 和 Cooper 用代数问题做实验发现, 尽管强化先前问题的学习对于解决后来一系列非常类似的问题有迁移作用, 但在解决要求用同样的数学规则, 表面特征不相似的问题时, 没有发生迁移^[6]。这说明, 对先后问题之间的关系缺乏意识影响了迁移的发生。Cooper 和 Sweller 再次对代数问题的迁移进行研究, 结果得出了与他们先前的研究不一致的结论, 认为在解代数题方面, 关于个别问题之间共性关系的意识, 不是影响迁移的重要因素, 即使解题者意识到问题之间的类似性, 在很多情境中, 获得迁移也只是有限的^[7]。他们曾坚持, 影响解题迁移的因素有三个: 对问题之间共性关系的意识及加工水平、图式归纳和解题规则运用的自动化。Schoenfeld 也发现, 即使解题者熟悉有联系的平面几何题的证明程序, 也会在新情境中失败^[8], 因而认为对两个问题之间共性关系缺乏意识影响迁移。Lovett 和 Anderson^[1]在研究平面几何解题记忆的迁移时, 对先后两个问题之间的关系用“think back”提示被试, 没有发生作用。在他们的研究中, 一个半小时的口语报告也几乎没有与先前刚解过的问题产生联系。由此, 他们得出了一个比较谨慎的结论: 被试对先后问题之间共性关系的意识是否影响迁移证据不足。这说明在解题时对于先后问题之间共性关系的意识及加工水平是否影响迁移, 存有相互矛盾的结论。这在解题迁移的研究中是个应该澄清的问题。

2 实验目的

先前获得的潜在地用于迁移的知识, 受任务本身结构的限制。对先前问题与后继问题之间类似性的成功利用, 要受到相关的问题结构特点的影响。迁移问题的主要困难在于识别出问题之间关键的结构共同性。

Sweller 和 Cooper 用代数问题进行的研究认为, 在解决要求用同样的运算规则, 不同的问题没有发生迁移, 原因在于被试没有形成运算规则自动化和所用的问题太难; Lovett 和 Anderson 用几何题研究解题记忆的迁移, 结论认为被试对先后问题之间共性关系的意识及加工水平是否影响了迁移证据不足, 则是因为他们所用的几何问题太简单了。平面几何问题的特点决定了在平面几何的解题中, 被试对先后问题之间共性关系的意识及加工水平应该是

影响解题迁移的重要因素之一, 但这一因素与问题难度因素可能有交互作用。为此, 我们提出这样的假设:

(1) 当迁移题较容易时, 被试对迁移题与源题之间共性关系的意识及加工水平对解题迁移的影响没有显著差异; 当迁移题较难时, 被试对两个问题之间共性关系的意识及加工水平对解题迁移的影响也没有显著差异。

(2) 当迁移题属于中等难度时, 被试对训练题与迁移题之间共性关系的意识及加工水平对解题迁移的影响有显著差异, 但被试的意识及加工水平在影响解题迁移时与问题难度因素有交互作用。

3 实验方法

3.1 实验设计 采用 3×2 二因素随机实验设计。实验中有两个自变量, 自变量 A: 问题难度, 有三种水平, 较难 (A_1)、中等 (A_2)、较易 (A_3); 自变量 B: 对先后问题之间共性关系的意识及加工水平, 有两种水平, 加工水平较高 (B_1)、加工水平较低 (B_2)。

3.2 被试 山东省聊城市第一中学(省重点中学)初中三年级学生。由于聊城小学实行五年制且 7 周岁入学, 故绝大多数被试年龄在 15 周岁上下不超过 1 周岁。过大或过小的学生没有选为被试。其中选择男生 120 名, 女生 72 名, 共 192 名。

3.3 时间 学生全部学完初中基础课程复习准备迎接中考期间。实验在学生自己的教室进行。

3.4 材料 由主试与山东省聊城市教委教研室数学教研组、山东省聊城第一中学、聊城第三中学等单位的数学特级教师和高级教师及初三任课教师共同选编。题目的效度、信度与难度, 都是由特级教师与高级教师根据长期教学经验进行评估, 而且对学生解决这些问题的成功率和时间进行了分析和推测, 并据此进行了预试。评分标准和问题暗示等级也是由上述教师讨论统一。其它实验材料有: 演草纸、钢笔或圆珠笔、铅笔、三角尺、橡皮和跑表。

3.5 程序 聊城一中初三年级共 8 个班, 每班约 75 名学生。根据学生学习的总成绩和班主任老师及数学任课教师的评定, 选择被试时从各班中排除了部分学习较差的学生。由于各班均有几名最优秀的学生, 故没有排除最优秀的学生为被试。

192 名被试平均分为 6 个组, 每组 32 名。对 120 名男生和 72 名女生进行匹配, 则每组 20 名男生, 12 名女生。6 个组随机分配到两个因素的 6 种不同处理水平上。然后将 192 名被试散布于 8 个班中, 其中

有四个班为 B_1 水平, 另四个班为 B_2 水平。对 B_1 、 B_2 进行随机分配。

实验题目共有 4 道, 其中一道为训练题(源题)。另外三道分别为难、中、易三种水平的迁移题(靶题)。由易到难的三道迁移题与源题之间均具有结构共同性, 要求用同样的性质定理和逻辑推理解决, 难度表现在条件隐蔽性逐渐增加和证题步骤愈加复杂。为防止学习效应, 将迁移题目的顺序编排为难→中→易、易→中→难、中→易→难三种顺序方式。因为共 8 个班, B_1 、 B_2 两种水平各有四个班, 根据需要将中→易→难的编排方式分给四个班, 其它编排方式各分给两个班。将题目编排方式随机分配给主试教师, 在统计结果时只统计做完训练题后所测三题中之中等难度的迁移题。

实验分两个阶段: 第一阶段 8 个班同学同时开始做训练题。根据预试结果, 对于训练题, 优秀的学生 3—5 分钟即可做完, 我们规定 14 分钟完成训练阶段, 以保证被试能很好地掌握训练题。当被试做题到 4 分钟时, 主试教师问同学: “大家都会做吗? 做完的同学请举手!” 这时各班均有少数同学做出训练题, 对于做出训练题的被试不予统计。然后主试用 5 分钟的时间讲解, 以保证每个被试都会做源题, 最后再让大家把该题完成, 14 分钟时再询问同学们是否都做完了, 然后收回训练题。第二阶段各主试教师分别根据各自的实验要求根据不同的顺序进行迁移测试。根据预试情况, 我们规定难题解题时间为 18 分钟, 中等题解题时间为 15 分钟, 易题解题时间为 7 分钟。各实验组由主试教师具体掌握执行, 试卷都是以做一题收一题, 再发下一题的方式进行。

在迁移测试时, 要求所有的被试将答案分为两个部分, 答卷纸左边三分之二部分为证题部分, 右边三分之一部分用来回答三个问题, 这三个问题是:

- (1) 证明此题主要用到哪些性质和定理?
- (2) 证明此题需要做辅助线吗?
- (3) 证明等积式有哪些常用方法?

三个问题有两个作用: (1) 由于被试对先后问题之间共性关系的意识及加工水平是难以控制在零水平的, 所以我们通过三个问题使被试对先后问题之间的共性关系统一在初级的加工水平; (2) 三个问题都回答基本正确者得 3 分。三个问题在实验开始时由主试教师写在黑板上, 并向被试说明。

分配在 B_1 水平的三个实验组, 由主试在迁移测验进行到 3 分钟时, 将另外三个问题写在黑板上要

求被试注意, 并读给被试听。这三个问题的目的是控制被试对先后问题之间共性关系的意识及加工水平处于高级水平, 即从让被试意识到两个问题之间有关系, 到对问题之间的关系有一定程度的理解。三个问题分等级按顺序依次提供给被试, 这三个问题是:

- (1) 此题与刚才做过的题之间有共性联系吗?
- (2) 可以用到刚才用过的方法吗?
- (3) 怎样把它还原为刚才那道题再证明?

实验结束, 收回试卷。加上收发试卷的时间, 实验总时间为 60 分钟(聊城一中晚自习时间为每节课 60 分钟)。

4 结果与分析

实验中的因变量为规定时间内被试在迁移题上的得分正确率, 满分为 10 分。对实验中提前交卷的被试未做加权处理, 实验结果如下:

- (1) 各处理组被试的得分情况如图 1 所示。

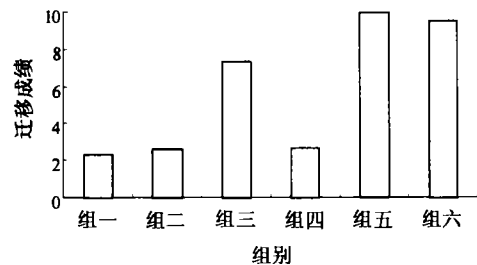


图1 各处理组被试的得分情况

注: 图中组一、组三、组五分别是 B_1 水平(加工水平高)的难、中、易迁移题的三个组; 组二、组四、组六分别是 B_2 水平(加工水平低)的难、中、易迁移题的三个组。

- (2) 各处理组成功地解决了迁移题的被试百分数如表 1 所示。

表1 各处理组的成功解题率(%)

意识水平	难度水平		
	较难	中等	较易
较高	0	53	100
较低	0	9	93

注: $n=32$

对各组被试成功解决迁移题的百分数进行 χ^2 检验, 结果为 $\chi^2 = 69.679$ ($df = 5$), $p < 0.005$ 。各组被试在迁移题上的成功解题率有显著差异。方差分析(ANOVA) (1) 实验的主效应显著, $F(3, 186) = 173.438$, $P = 0.000$; (2) 自变量 A—问题难度的主效应达到非常显著的水平 $F(2, 186) = 242.934$, $P = 0.000$; (3) 自变量 B—加工水平的主效应达到非常

显著的水平 $F(1, 186) = 34.445, P = 0.000$; (4) 问题难度与加工水平之间存在交互作用且达到显著水平 $F(2, 186) = 31.876, P = 0.00$ 。

在自变量 A(问题难度) 因素 A_1 、 A_2 、 A_3 的三种不同水平上, 较高 (B_1) 和较低 (B_2) 加工水平的影响所造成的差异分别如表 2 所示。

表2 两种加工水平下不同难度迁移题的成绩

加工水平	A(难度水平)		
	A_1 (较难)	A_2 (中等)	A_3 (较易)
较高	2.25(0.92)	7.31(3.35)	10.00(0.00)
较低	2.56(0.67)	2.59(2.49)	9.53(1.85)

注: 括号内为标准差; $n=32$ 。

对两种加工水平下迁移题成绩的平均数进行 t 检验。当迁移题较难时, $t = 1.56, df = 57, P = 0.125$, 两组差异不显著; 当迁移题为中等难度时, $t = 6.40, df = 57, P = 0.000$, 两组差异达到非常显著的水平; 当迁移题容易时, $t(31) = 1.43, P = 0.162$, 两组差异不显著。

5 讨论

当迁移题较容易时, 即迁移题(靶题)与训练题(源题)都属于低难度问题且它们之间有很大的相似性, 也就是两题之间的表面特征与结构特征及证题所需的性质、定理、定义和基本步骤都有很大的类似性时, 被试对于这样的先后问题之间共性关系的意识及加工水平, 对解题迁移的影响没有显著差异, 实验中被试在迁移题上的成绩出现了天花板效应。

当迁移题较难时, 即迁移题(靶题)与训练题(源题)之间的难度不同, 也就是迁移题与训练题之间有一定的结构相似性但表面相似性较小, 条件较隐蔽时, 被试对两个问题之间所存在的共性关系的意识及加工水平高低, 对解题迁移的影响差异不显著。实验中组一和组二被试的迁移成绩差异不显著 ($t = 1.56, df = 57, P = 0.125$), 且出现了地板效应。

只有当迁移题处于中等难度时, 即迁移题与源题之间具有结构相似性, 但表面特征有部分较隐蔽的相似性, 只有揭露隐蔽条件才能利用结构特征。这时, 被试对迁移题与训练题之间存在共性关系的意识及加工水平对解题迁移的影响有显著差异。

朱新明^[9]研究过学生解决平面几何问题时的思维过程, 从中发现, 如果学生能从问题的情境中正确地辨认出某种模式, 就能唤起他们认知结构中与解

题有关的知识, 而且解题经验丰富的学生能很快地把他们原来熟悉的模式辨认出来, 缺乏解题经验的学生, 则要经过一些无效的尝试才有可能正确地识别出问题模式。我们在分析实验材料时有经验的特级教师推测, 对于中等难度的迁移题“少数优秀学生可以不经提示而独立完成, 中上的学生一点就透”, 这种情况下就显示出意识因素的重要性, “难”就是因为“没有意识到”, 而不是问题本身难; 对于高难度的迁移题, “个别优秀学生经努力可以完成, 大多数学生经提示也难以完成”, 这种难就有来自于问题本身的因素。因此即使告诉学生可以用刚刚用过的解题方法, 由于学生理解的深度和加工水平不够及信息加工程序复杂, 意识因素也就失去了作用。实验结果证实了这一推测, 也支持了 Cooper 和 Sweller 的推测, Cooper 和 Sweller 后来 (1987) 认为他们 1985 年的实验所用的材料太难, 以至于被试没有发生迁移。

实验结果表明, 当迁移题难度较大时, 意识及加工水平高低对迁移题成绩的影响没有显著差异。随着迁移题难度的降低, 意识及加工水平对迁移的作用开始增加。当迁移题难度降低到中等水平时, 意识及加工水平对迁移的影响出现了显著差异。随着迁移题难度的继续降低, 意识及加工水平对迁移影响的差异也随之减小。当迁移题的难度降低到一定程度时, 意识及加工水平对迁移影响的差异又消失了。这种动态变化的作用机理在于问题难度与加工水平之间的交互作用, 如果迁移题难度太大, 即使解题者意识到其与源题之间存在一定的内在关系, 也不能顺利地实现迁移, 意识及加工作用没能促使解题成功; 相反, 如果迁移题难度太小, 解题者无须意识到其与源题之间存在一定的内在关系, 也能顺利地解决迁移题, 解题的成功并非由于意识及加工水平所起的作用。只有当迁移题属于中等难度时, 解题者对迁移题与源题之间存在着共性关系的意识及加工水平对解题迁移的影响才有显著的差异。

6 结论

通过实验研究得出以下结论:

(1) 在平面几何解题过程中, 解题者对具有内在联系的先后问题之间共性关系的意识及加工水平, 是影响解题迁移的重要因素之一。

(2) 迁移题的难度太大或太小, 将导致解题者对先后问题之间共性关系的意识及加工作用的失败

而出现地板效应和天花板效应,且加工水平与问题难度在影响解题迁移时有交互作用。

参 考 文 献

- 1 Lovett M C, Anderson J R. Effects of solving related proofs on memory and transfer in geometry problem solving. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory, and Cognition*, 1994, 20:366—378
- 2 Allan B I B. Problem-Specific Information and the Development of Problem Type Schemata. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory, and Cognition*, 1994, 20:379—395
- 3 Gick M L, Holyoak K J. Analogical problem solving. *Cognitive Psychology*, 1980, 12:306—355
- 4 Gick M L, Holyoak K J. Schema induction and analogical transfer. *Cognitive Psychology*, 1983, 15:1—38
- 5 Reed S K, Dempster A, Ettinger M. Usefulness of analogous solutions for solving algebra word problems. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory, and Cognition*, 1985, 11:106—125
- 6 Sweller J, Cooper G A. The use of worked examples as a substitute for problem solving in learning algebra. *Cognition and Instruction*, 1985, 2:59—89
- 7 Cooper G A, Sweller J. Effects of schema acquisition and rule automation on mathematical problem-solving transfer. *Journal of Educational Psychology*, 1987, 79:347—362
- 8 Schoenfeld A. Beyond the purely cognitive: Belief systems, social cognitions, and metacognitions as driving forces in intellectual performance. *Cognitive Science*, 1983, 7:329—363
- 9 朱新明. 解决几何问题的思维过程. *心理学报*, 1983, (1):9—17

THE INFLUENCE OF THE AWARENESS OF THE ISOMORPHIC PROBLEMS ON GEOMETRY PROBLEM-SOLVING TRANSFER

Yang Weixing

(Liaocheng Normal University, Liaocheng 252059)

Zhang Meiling

(Institute of Psychology, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100101)

Abstract

The influence of the difficulty of the target problem namely the related isomorphic problems which have some surface similarity, and the awareness of the related problems of solvers had been examined by experimental research. Results suggested that during the process of geometry problem solving, the level of awareness of related problems is one of the major factors that influence the effect of problem-solving transfer. Either more difficult or easier the transfer problem will hinder the influence of awareness of related problems during problem-solving transfer, even the achievements of the problem solvers will show floor effect or ceiling effect, and the degree of difficulty of the transfer problems have interactions with the level of awareness of related problems in affecting problem-solving transfer.

Key words transfer, geometry, difficulty of transfer-problem, isomorphic problems, level of awareness.