

解答加减文字题中情境复杂性对问题难度的影响*

周新林^{1,2} 张梅玲²

(¹ 北京师范大学心理学院脑与认知科学研究所;北京师范大学“认知科学与学习”教育部重点实验室,北京 100875)

(² 中国科学院心理研究所,北京 100101)

摘要 过去人们基于语言复杂性探讨加减文字题的难度成因,本研究将探讨情境复杂性对问题难度的影响。被试为北京市一城区小学二年级共 108 名学生(男 52,女 56),平均年龄 8 岁 4 个月。采用 2(问题类型:“给”问题和“拿”问题)×2(事件类型:增多事件和减少事件)混合设计。对于“给”问题,增多题中各语句的主语不一致,减少题中一致,对于“拿”问题则相反。根据语言复杂性解释,因为各语句的主语一致有利于加工,“给”问题有减少题加工优势,“拿”问题有增多题加工优势;根据情境复杂性解释,因为减少情境有利于加工,两类问题均有减少题加工优势。实验表明不论“给”问题还是“拿”问题,均有减少题的加工优势,支持情境复杂性解释。

关键词 加减文字题,情境表征,问题解决,语言理解。

分类号 B842.5

1 前言

加减文字题,即用加减法解答的数学应用题,是小学低年级学生数学学习中的重要内容,解决这种类型的问题,既是获得数学概念的工具,也是发展解答数学问题能力的重要途径^[1]。人们发现,儿童解答加减文字题,相对于算术题,例如 $2+3$,要困难得多^[2,3]。目前人们主要认为是言语复杂性(language sophistication)导致的,即儿童不能准确理解某一词语、句子或者描述情境的方式将导致解题错误^[4,5]。实际上,在一些情况下,儿童可以正确理解语言文字,但仍然出现解题错误,这可能是另一种因素影响了问题解答,即语言所描述的情境复杂性特征。如果问题所涉及的故事情境在被人理解时存在着困难,这可能影响问题解答,这称为情境复杂性假设。

1.1 解题错误的语言复杂性假设

有些研究表明学生不能有效地理解陈述问题的言语将导致解题错误。

首先,不熟悉某些词句将导致解题错误。例如,年幼儿童在解答问题:“Pete 有 3 只苹果; Ann 有一些苹果; Pete 和 Ann 一共有 9 只苹果; Ann 有多少只苹果?”时,回答有“9 只苹果”,在被要求作出解释时,儿童认为这是问题中明白告诉的,即问题是这样

陈述的“Ann 有 9 只苹果; Pete 也有 9 只苹果”,研究者就认为,儿童不能准确理解“共有(together)”,而是将它理解为“每一个(each)”^[6]。在 Mayer 的研究中^[7],儿童倾向于将较为复杂的比较关系陈述语句理解为相对简单的指派语句,例如,“玛莉比约翰多 5 个弹子”,儿童将其理解为“玛莉有 5 个弹子”。在另一项研究中,也表明儿童不能有效理解关系陈述,即儿童不能意识到下面 2 种表述是对等的:“集合 x 比集合 y 多 n 个”与“集合 y 比集合 x 少 n 个”^[5]。

其次,语言结构的复杂性也将影响问题解答。语言结构是多方面,这里仅举出一例。当问题以某一事件作为题材时,在对事件的陈述方式上有 2 种结构,一种是陈述顺序与事件发生发展的时间顺序一致,一种是不一致(问题举例见下面,问题来自 Fayol, Abdi 和 Gombert 于 1987 年的研究,问题中的数字是本文作者加上的)。在一致的时候,问题比较容易解答^[8]。

一致问题 波尔有 6 个糖果。他的妈妈给了他 4 个。他的姐姐给了他 5 个。现在他有多少个?

不一致问题 在早晨有 6 辆汽车开进了车库。在中午有 4 辆。昨天里面有 5 辆。现在有多少辆?

上面 2 个方面都表明言语理解的重要性。词句

收稿日期:2002-05-15

* 本研究属国家自然科学基金资助重点项目“儿童认识能力发展和促进的研究”部分工作(项目批准号:39730180);还得到国家攀登计划专项任务(95-专-09)的资助。

的不理解或者语言结构的复杂性,确实可以导致一定的解题错误,但是,这并不能排除其它的可能性。

1.2 减少题的解答优势

变化题以变化事件作为题材,是一种典型的加减文字题,在一些研究中经常被采用^[3,9]。基本的变化题共有6种,根据未知集类型,分为结束集未知、变化集未知和开始集未知。变化题包含的事件可以分为增多事件和减少事件,增多事件指在原有客体集的基础上再增加一些客体,导致客体集数量增多,减少事件指在原有客体集的基础上减少一些客体,导致客体集数量减少;以增多事件为题材则是增多题,以减少事件为题材则是减少题。问题举例及其分类见表1。

表1 本实验中采用的6类变化题及其分类

| 问题类型 | 题号与具体问题举例 |
|-------|---|
| 结束集未知 | |
| 增多: | 1. 明明有 a 件玩具, 华华给明明 b 件玩具, 现在明明有多少件玩具? |
| 减少: | 2. 明明有 a 件玩具, 明明给华华 b 件玩具, 现在明明有多少件玩具? |
| 变化集未知 | |
| 增多: | 3. 明明有 a 件玩具, 华华给明明一些玩具, 明明现在在 b 件玩具, 华华给明明多少件玩具? |
| 减少: | 4. 明明有 a 件玩具, 明明给华华一些玩具, 明明现在在 b 件玩具, 明明给华华多少件玩具? |
| 开始集未知 | |
| 增多: | 5. 明明有一些玩具, 华华给明明 a 件玩具, 明明现在在 b 件玩具, 开始明明有多少件玩具? |
| 减少: | 6. 明明有一些玩具, 明明给华华 a 件玩具, 明明现在在 b 件玩具, 开始明明有多少件玩具? |

注:将上面问题中的“给”改为“拿”以后,增多题变成了减少题,减少题变成了增多题

先前研究反复证实,未知集类型的效应是非常显著的,即结束集未知题在3种问题中最为容易^[3,10]。但是,对于增多题和减少题之间的差异却没有受到重视,没有统计分析资料。不管怎样,许多研究报告提供了在2种类型问题上的正确率或错误率,直观上,它们的差异方向基本上是一致的,即增多题有更多的错误率,例如,在Riley和Greeno的研究中^[9],在积木块的帮助下,幼儿园里的儿童解决增多题和减少题的错误率分别是48%和29%,一年级儿童是39%和28%。Riley等人还引用了Tamburino的一项研究结果,即年幼儿童的成绩是57%和44%。在Rathmell(1986)的研究中^[11],二年级儿

童的解题错误率在增多题和减少题上分别是8%和2%。在Cummins等人的研究中(1988)^[3],对于一年级儿童,包括前面提到的Riley和Greeno研究中的幼儿园和一年级儿童,错误率最高的问题均是第5题,这是一道增多题。根据这些结果,可以认为儿童解答减少题有直观上的优势。

如果确实有减少题的解答优势,应该如何解释呢?我们提出2种假设,一是语言复杂性假设,一种是情境复杂性解释。

语言复杂性假设认为,尽管2种类型的问题有完全相同的词句,但是语言格式不同,增多题中的各语句具有不一致的主语,但是减少题中的各语句具有完全一致的主语。在对多个句子的加工中,主语一致能够促进理解^[12],那么主语的一致性导致了减少题的加工优势。

下面将根据一项研究提出情境复杂性假设。在这一研究中,要求小学2~6年级学生采用数字2和4自由编写算术文字题,发现以上各年级学生均是更倾向构造出减少题,要求四年级学生采用“拿”、“飞”和“停车场”3个词语分别编写问题,也是主要编写出减少题。这一任务类型没有出现解答问题的过程,只是需要运用语言知识、世界知识和问题知识编写问题,能够更好的考察学生对问题中涉及的故事情境(一种世界知识)的表征。基于上面的调查结果和心理过程理论分析,基本上可以认为存在着减少情境表征优势,即与增多情境相比,减少情境是更为容易表征的情境(其原因将在文章最后部分予以初步讨论)。因为有减少情境表征优势,在解答问题时,学生有可能将增多情境表征为减少情境,所以增多题被理解为减少题,这可能导致在增多题上有更多的解题错误。

1.3 实验目的

实验的主要目的是检验关于减少题加工优势的2种解释。以学习完加减文字题的二年级学生为被试。为避免高限效应,问题中的数量采用几何符号(Δ , \square , \circ)表示。

先前研究采用的变化题基本上是表1中含有动词“给”的问题,它们简称为“给”问题。对于“给”问题,增多题的主语不一致,减少题的主语一致。现在将动词“给”改为“拿”,称作“拿”问题。此时增多题的主语是一致的,减少题的主语是不一致的。根据语言复杂性解释,对于“给”问题,将有减少题优势,对于“拿”问题,将有增多题优势;根据情境复杂性解释,不论“给”问题还是“拿”问题,均有减少

题优势。

2 方法

2.1 被试

北京市一城区小学二年级共 108 名学生参加实验,他们来自 2 个常规教学班。男 52 名,女 56 名,平均年龄为 8 岁 4 个月。

2.2 设计

采用 2(问题类型:“给”问题和“拿”问题) × 2(事件类型:增多事件和减少事件)混合设计。问题类型是组间变量,事件类型是组内变量。因变量是学生解答问题的成绩,衡量的指标是解题错误率。

2.3 材料

6 道“给”问题和 6 道“拿”问题为实验材料(见表 1)。另外还有 6 道合并题和 8 道比较题作为填充题。2 种类型问题与填充问题分别构成一套测验题,均是 20 个问题。对于每一被试,每一问题中的 2 个已知数量从 3 个几何符号 \triangle \square \circ 中随机选择 2 个表示。实验参加者在先前的学习中已经学习过这些几何符号,能够对它们进行正确地命名。20 道题的顺序对于每一被试随机,打印在一张大小为 29.7 cm × 21 cm 纸上。在试卷的上方,有被试需要填入姓名、性别等内容的被试信息栏。

2.4 程序

学生随机分为 2 组,一组解答“给”问题,一组解答“拿”问题。以班级为单位集体施测。在测验之前,向学生讲解测验的有关内容。

测验的目的是要了解哪些问题比较难以解答。向学生讲解 3 个符号,包括它们的名称分别是“三角”、“方形”和“圆形”,并且每一符号可以代表任何一个数字,例如 2、3、4 等。结合下面的一道文字题讲解它们在文字题中的意义和解题方式:

班上有 \triangle 位男同学,有 \square 位女同学,共有 () 位同学。时间()。

学生需要将问题的答案直接填在题文中的括号里。要求学生每做完一道题,将教室前面的大型显示屏幕上的时间(第一眼看清的)写在每一问题中“时间”后面的括号里,该显示屏幕受一台计算机控制。从“1000”开始显示时间,这样保证做完每一道题后写的时间均是 4 个数字,每隔 1s 改写一次时间。要求学生按顺序从前至后解答问题,全部问题解答完成以后,无须检查,直接将试卷交给老师。

测验的基本要求讲解完以后,试卷发给学生。试卷发放给学生时,它被折叠为 2 个部分,上部分为

试卷信息栏,下部分为 20 道文字题。上部分朝向学生,下部分朝向桌面。学生拿到试卷后要求填写被试信息栏。全部学生填写完成以后,作好开始解答问题的准备。施测者说“开始”后,学生就将试卷展开并开始做题,并且同时施测者按键启动计时器开始在大屏幕上显示时间。

3 结果

部分学生的测验数据不作分析,因为这些学生或者中途放弃测验(对于二年级学生太难),或者没有填写时间,或者统一采用加法或减法解答所有问题。这样一来,有效参加者在“给”问题和“拿”问题条件下的数量分别是 51 人和 50 人。

为了分析结果方便,将问题中出现的第一个数量用 a 表示,第二个数量用 b 表示。

3.1 解题时间和错误率

关于解答问题的时间,对于“给”问题,在 6 类问题上的平均时间为 19、19、24、23、22 和 23s,对于“拿”问题,则分别是 19、20、22、24、21、24s。在问题类型和事件类型两因素方差分析中,没有任何效应;在问题类型和未知集类型两因素方差分析中,未知集类型主效应显著, $F(2, 198) = 17.1, p = 0.000$, 配对比较表明结束集未知题比其余两类问题均显著容易。

每一问题的错误率计算方法是:正确解答人数/有效参加人数 × 100, 结果见表 2。加法问题的主要错误类型是算符错误,但是,对于减法问题,主要的错误类型有 2 种,除了算符错误以外,还有算数顺序错误,例如解答一道题正确答案为“ $\square - \circ$ ”,但被试的答案为“ $\circ - \square$ ”。每题主要错误类型的百分率也见表 2。

表 2 儿童解答“给”问题和“拿”问题的错误率(%)

| 题号 | 答案 | “给”问题 | “拿”问题 | 总体 |
|----|-------|-----------|-----------|-----------|
| 1 | a + b | 26(26,0) | 47(47,0) | 37(37,0) |
| 2 | a - b | 16(14,2) | 14(8,6) | 15(11,4) |
| 3 | b - a | 77(34,43) | 59(14,45) | 68(24,44) |
| 4 | a - b | 22(12,10) | 29(18,12) | 26(15,11) |
| 5 | b - a | 62(51,11) | 59(41,18) | 61(46,15) |
| 6 | a + b | 20(20,0) | 29(29,0) | 25(25,0) |

注:括号里的第一个表示算符错误率,第二个数表示算数顺序错误率

通过问题类型和事件类型两因素方差分析,只有事件类型主效应显著, $F(1, 99) = 60.0, p = 0.000$ 。即不论是“给”问题还是“拿”问题,均有减少题的加工优势。通过问题类型和未知集类型两因

素方差分析,未知集类型主效应显著, $F(2,198) = 13.9, p = 0.000$,配对比较表明结束集未知题比其余两类问题均显著容易, $p = 0.000, p = 0.000$ 。

3.2 错误列式方式

对于一个问题,学生所给出解答可以认为是内部表征的反映,即使是错误的解答,也不例外。根据先前研究,有一种表征类型可能导致解题错误,即事件进程表征,当学生采用直接模型化程序解答问题时^[9],实质上就是将事件进程直接映射到数学运算上,这就是结束集未知题比较容易的原因。

根据前面的分析,主语一致性并不是导致减少题加工优势的原因,而可能与减少情境表征优势有关。这意味着学生可以将增多情境表征为减少情境。所以,减少情境表征也可能导致一些问题(例如增多题)出现解题错误。

将6类变化题的正确解答(例如“ $a + b$ ”,“ $a - b$ ”、“ $b - a$ ”)作为形式运算,事件进程表征(R_1)和减少事件表征(R_2)也对应着一定的运算,在某一问题上如果它们与形式运算之间不一致,就意味着存在冲突;在有冲突的情况下,如果根据事件进程表征或者减少事件表征列出算式,就出现解题错误。冲突越多,解题错误就越多。表3列出了它们与形式

运算之间的冲突方式,分为2种:算符冲突和算数顺序冲突。

下面对错误率在冲突程度上进行回归分析,采用Enter方法。因为“给”问题和“拿”问题没有差异,所以作为整体进行分析。回归方程为:

$$PE(\text{错误率}) = 17 + 16R_1 + 28R_2$$

回归方程具有显著性, $F(2,3) = 11.5, p < 0.05$,能够解释89%的变异。它表明儿童解答几何符号数量文字题时,事件进程表征和减少事件表征产生了一些解题错误。

对错误率进行的回归分析,它的有效性除了用上面的统计量值说明以外,还可以结合错误类型数据进行直观上的分析。加法问题的错误类型只是算符错误,无需分析。对于减法问题,根据表2,题3和题5可能有较多的解题错误。对于题3,预测既有算符错误,也有算数顺序错误,在回归方程中它们之间的比率为0.57(16:28),实际则为0.55(34:43),两者相当接近;对于题5,预测主要的错误将是算符错误,没有算数顺序错误,实际的情况正是大部分错误为算符错误。所以,这进一步表明上面回归分析是有效的。

表3 问题的正确数学运算与某表征所蕴含运算之间的冲突(0:无冲突,1:有冲突)

| 题号 | 正确数学运算 | 事件进程(R_1) | 算符冲突 | 算数顺序冲突 | 减少情境(R_2) | 算符冲突 | 算数顺序冲突 |
|----|---------|---------------|------|--------|---------------|------|--------|
| 1 | $a + b$ | $a + b$ | 0 | 0 | $a - b$ | 1 | 0 |
| 2 | $a - b$ | $a - b$ | 0 | 0 | $a - b$ | 0 | 0 |
| 3 | $b - a$ | $a + b$ | 1 | 0 | $a - b$ | 0 | 1 |
| 4 | $a - b$ | $a - b$ | 0 | 0 | $a - b$ | 0 | 0 |
| 5 | $b - a$ | $a + b$ | 1 | 0 | $a + b$ | 1 | 0 |
| 6 | $a + b$ | $a - b$ | 1 | 0 | $a + b$ | 0 | 0 |

4 讨论

本研究通过一个实验验证情境的复杂性可以影响儿童解答加减文字题的假设。实验结果表明,与增多题相比,减少题有显著的解答优势,这些解答优势与语言的复杂性没有直接的关系,可以采用情境复杂性解释。这一结果基本上可以说明情境复杂性能够影响儿童解决问题。当然,这并不意味着语言复杂性的影响作用不存在。

4.1 测验方式

过去的类似研究中,人们用阿拉伯数字表示数量、口头呈现问题和采用个别测验。本测验则有几个方面不同:采用几何符号表示数量、纸笔测验和集

体测验。这种变化一是为了增大问题难度,二是为了测验的标准化。

尽管有这种测验方式上的变化,研究结果仍然有一致的地方,例如,未知集类型的显著影响、减少题的解答优势等。除了一致性的地方以外,也有不一致的地方,首先,增多题和减少题之间的难度差异是非常明显的,而在过去的研究中则是比较微弱的。这可能与问题难度增加有关。其次,在6类问题中,最难的问题是题3和题5,不再仅仅是题5。这种差异可以根据学生的解题策略解释。当数量用数字表示时,对于小学生而言,不可能用小减大数,只可能用大数减小数,所以,在题3中的算数顺序错误就不可能存在了,错误率将大为降低,这就导致只有题

5 的错误率最高。

研究结果表明情境复杂性可以影响儿童解答问题,这一结果是否局限在几何符号数量问题上呢?根据上面的分析,尽管测验方式有变化,但是在结果上有一致的地方,问题之间相对难度上的变化,也可以在情境表征复杂性假设的框架下予以解释。所以,可以认为,研究结果也是适用于儿童解答数字数量问题。

4.2 减少情境表征优势及其影响

至于为何存在着减少情境表征优势,本研究提出 2 种可能的解释。首先,因为儿童表征信息的能力有限,从而将注意力放在第一陈述的客体集上;此外,注意中心的客体集必须是整体集。减少情境符合这 2 个方面的表征要求,所以有减少情境表征优势。其次,经验因素导致了减少情境表征优势,因为儿童经历的情境可能主要为减少情境。例如,儿童将“买”和“吃”连在一起编写问题时(妈妈买回来 4 个苹果,我吃了 2 个,还剩下多少个苹果?),编写出的问题主要是减少题,这可能因为儿童本人更多的经验是吃东西,而不是买东西。上面 2 种解释尚需更多的证据。

增多情境和减少情境本身并不是学生不能理解,而是它们作用于人的认知过程后在复杂性程度上有差异,增多情境更为复杂。当问题难度增大后,学生难以寻找适宜的集合关系表征,将依赖比较简单的和熟悉的表征,此时,将会出现将增多情境表征为减少情境。

4.3 情境表征在加减文字题解答中的作用

一些研究者认为儿童理解问题中的故事情境是非常重要的^[13],解答问题主要体现为建立情境表征。研究表明,理解了问题中的故事情境只是一个基本的前提条件。即使有了正确的情境表征,不一定能够正确解答问题。例如,事件进程的表征是一种典型的情境表征,学生完全可以建立这种表征,如果学生将它直接映射到数学运算上,这将在题 3、5 和 6 上导致一些解题错误。对于解答加减文字题而言,需要学生理解情境,此外,可能更为重要的是需要以这种理解为基础进行推理,以推导出符合问题目标要求的集合关系表征,然后将这种表征映射到数学运算上。

5 结论

实验表明情境复杂性导致了减少题的加工优

势,这一实验结果意味着情境复杂性是可以影响儿童解答加减文字题的,而产生这种作用的原因是当问题难度增加后,学生选择了简单的或熟悉的表征解答问题。

参 考 文 献

- 1 Briars D J, Larkin J H. An integrated model of skill in solving elementary word problems. *Cognition and Instruction*, 1984, 1: 245 ~ 296
- 2 Carpenter T P, Moser J M. The development of addition and subtraction problem - solving skill. In: T P Carpenter, J M Moser, T A Romberg ed. *Addition and subtraction: A cognitive perspective*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Inc, 1982. 9 ~ 24
- 3 Cummins D D, Kintsch W, Ruessler K, Weimer R. The role of understanding in solving word problems. *Cognitive psychology*, 1988, 20: 405 ~ 438
- 4 Cummins D D. Children's interpretations of Arithmetic word problems. *Cognition and Instruction*, 1991, 8(3): 261 ~ 289
- 5 Stern E. What makes certain arithmetic word problems involving the comparison of sets so difficult for children? *Journal of Educational Psychology*, 1993, (1): 7 ~ 23
- 6 d'Ailly H, Simpson J, Mackinnon G E. Where should "you" go in a math compare problem? *Journal of Educational Psychology*. 1997, (3): 562 ~ 567
- 7 Mayer R E. Memory for algebra story problems. *Journal of Educational Psychology*, 1982, 74: 199 ~ 216
- 8 Fayol M, Abdi H, Gombert J. Arithmetic problems formulation and working memory load. *Cognition and Instruction*, 1987, 4(3): 187 ~ 202
- 9 Riley M S, Greeno J G. Developmental analysis of understanding language about quantities and of solving problems. *Cognition and Instruction*, 1988, (5): 49 ~ 101
- 10 Sophian C, Vong K I. The parts and wholes of arithmetic story problems: Developing knowledge in the preschool years. *Cognition and Instruction*, 1995, 13(3): 469 ~ 477
- 11 Rathmell E C. Helping children learn to solve story problem. In: A Zollman, W Speer, J Meyer ed. *The Fifth Mathematics Conference Papers* Bowling Green, OH: Bowling Green State University, 1986. 101 ~ 109
- 12 Kintsch W, van Dijk T A. Toward a model of text comprehension and production. *Psychological Review*, 1978, 85: 363 ~ 394.
- 13 Kintsch W. Learning from text. *Cognition and Instruction*, 1986, 3: 87 ~ 108

INFLUENCE OF SITUATION COMPLEXITY ON SOLVING ADDITION AND SUBTRACTION WORD PROBLEM

Zhou Xinlin^{1,2}, Zhang Meiling²

(¹*Institute of Brain and Cognitive Science, School of Psychology, Beijing Normal University;*

Laboratory for Cognitive Science and Learning of Ministry of Education at Beijing Normal University, Beijing, China 100875)

(²*Institute of Psychology, The Chinese Academy of Sciences, Beijing, China 100101*)

Abstract

Previous research has shown that the language complexity primarily contributed to problem difficulty in children's solving addition and subtraction word problems, which was called language complex hypothesis. The children's unfamiliarity with some words, phrases, sentences or linguistic forms might lead to their failures in processing linguistic description and finding solution. However, the situations described by familiar language can vary in difficulty level of representing, which implies that situation complexity could substantially contribute to problem difficulty. The present study probes into the possibility by exploring why object – separating word problems are easier to solve than object – joining word problems. There were two alternative explanations. In terms of language complexity hypothesis, the superiority of solving object – separating problems was owing to the consistent subject for all sentences described the problem. The object – joining problem didn't have consistent subject for all sentences, thus was solved with more difficulty. Since there was superiority of representing object – separating event disclosed in related research, the situation complexity hypothesis emphasized that the superiority of solving object – separating problems was owing to the superiority of representing object – separating event. Except for the problems containing key verb "give", the problems containing key verb "take" was applied. For the latter, the object – joining problem had consistent subject, but the object – separating problem did not. According to language complex hypothesis, there should have the superiority of solving object – joining problems containing verb "take", however, according to situation complex hypothesis, there should have the superiority of solving object – separating problems regardless of the problem types. Second graders (mean age: 8 years and four months) in a primary suburb school of Beijing city were asked to solve these problems. Results showed that there was superiority effect of processing object – separating problems regardless of the key verbs involved in the problems, which strongly supported the situation complex hypothesis. The theoretical implication on children's mathematical cognition was discussed at the last part of this article.

Key words addition and subtraction word problems, situation representation, problem solving, language comprehension.