

初中学生自学数学的思维能力研究*

卢仲衡 宋同荦 吴瑞华

中国科学院心理研究所

摘要

利用数学自学教材的实验,观察到学生自学能力的个别差异是很大的,学习的思维品质是不同的,同时初步看到了学生自学能力的成长。再一次证明了在编写学生自学数学教材中,按步思维、可逆性联想、采用变式复习等心理学原则起着重要作用。

一、前言

1964年心理所曾开展程序教学的研究。从各学科的研究结果看来,程序教学的确有某些有利因素。但是,课本式的程序教学,所要编写的课本篇幅浩大、烦琐冗长、难于复习和查阅,没有推广价值。

1965年底,我们吸取了程序教学的某些优点,结合了一些有效的教学心理的原则,提出了三个本子的教学(关于三个本子教学的教材编写原则、编写方法和实验方法详见1978年心理学会论文集中关于“因式分解自学实验的比较研究”一文。在心理学报1979年第二期关于“促进初中学生自学数学有效心理学原则”一文的开始部分也有简略介绍)与欧美式的程序教学作比较试验。结果证明,这种方法不仅成绩优于程序教学,而且自学时间也有所缩短。更重要的是,这种方法受学生欢迎:程序教学班有半数学生反对程序课本,而我们三本教学实验班只有一人反对。这种方法与教师的课堂教学作比较,成绩相近,学习时间却缩短了1/4。73、74年以及78年,再把我们这样编法的自学教材与老师教学进行对比试验,仍然获得同样的效果。经过一年半的自学实验,也发现了初中学生自学数学思维能力的迅速成长。实验班学生和对比班学生以同样长的时间自学现成数学课本,前者则比后者解题数量增加三倍,错误也少。

从初一开始自学“从小步逐渐过渡到大步”这样编写的数学教材,已被证明是可能的,效果也比较肯定。因此我们认为可以利用自学教材作工具(因为自学教材教法和练习数量都比较固定)来研究自学中学生思维能力的成长,以及观察学生的思维品质。但在效果比较的实验中,因为学校里班级多,人数多,同时条件变化较大,不易控制,很难对学生自学思维能力成长和思维过程作深入持久的研究,因此我们从79年暑期开始,在西颐小学毕业班招收了18名中等程度以上的学生,进行自学数学的小型实验,以便较为容易按照我们的目的去进行研究。

* 本研究是在潘菽教授指导下进行的,由于客观条件发生变化,未能按原计划进行。

二、实验方法和实验结果

在小型实验班中,学生完全自学,不懂的问题可以问老师。学习过程中,不要求统一进度,快者可以快学,慢者可以慢学。每做完一、两节内容后,就让学生独立做一个课时左右的测验题。由于测验比较频繁,所以学生如果不弄懂教材,不好好地做练习,那他们就无法做对测验题。这样做,既检查了学生自学的效果,也起到了督促学生认真学习的作用。我们把测验题及时批改后,立即发还给学生,让他们认真阅读考卷。对错误较多,或问题较严重的后进生,要进行个别辅导,给他们指出问题所在。由于人数较少,我们能认真总结分析各种错误类型,也能有机会对不同类型的学生的解题思维过程进行较细致的观察,并对他们的某些解题过程进行询问,以作更深入的了解。

(一)1979年暑期小型自学实验的结果

表 1 小型实验班自学成绩和课时表

自学课程数量	完成第二学期的1/4					完成第一学期					完成第一学期的2/3							
	20	20	20	20	20	19	19	19	19	19	18	15	15	14	13	12	12	11
测验的次数	20	20	20	20	20	19	19	19	19	19	18	15	15	14	13	12	12	11
被试代号	吴	宋	关	林	徐	柴	鲁	顾	董	朱	秦	雷	阮	史	白	石	戴	燕
平均分数	92.1	90.1	89.1	85.9	86.7	94.6	93.2	92.3	88	80.8	88.7	92.6	87.1	85.8	92.2	89.8	87.9	87.1
自学实际课时数	105	105	108	96	111	116	115	111	108	102	102	102	105	105	96	99	96	97

暑期的小型实验班,共上课 38 天,每天 3 课时(每课时45分钟)。其中有些学生请假,也有些在课外继续学习做题,这样,每个学生的实际课时数(不是非常准确的)见表 1。从表 1 还可以看到,在这 100 课时左右的自学时间里,学得快的学生,不仅学完第一学期的课程,而且还学了第二学期课程的 1/4;学习速度中等的学生,自学完第一学期的课程;学得慢的学生,只学完第一学期课程的 2/3。由此可见,学得快和学得慢的学生的学习速度相差一倍左右。

在这个暑期实验中,共进行 20 次测验,每次测验约占一课时。测验是个别进行的,学得快的学生 20 次测验全做过了,学得慢的学生只做了 11 次。每人各次测验的总平均分数都在 80 分以上。除暑期快结束有些学生因赶进度而造成最后一次测验有 2 个不及格的外,其余均无不及格的。90 分以上的有不少人,不过每次测验都在 90 分以上的只有一个学

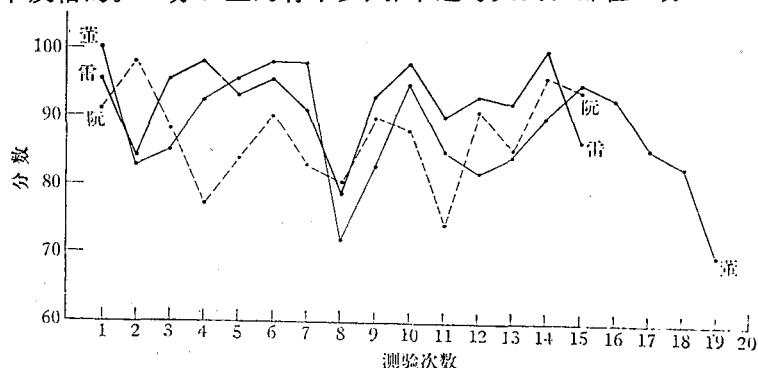


图 1 实线代表学习踏实的学生,虚线代表学习不够踏实的学生

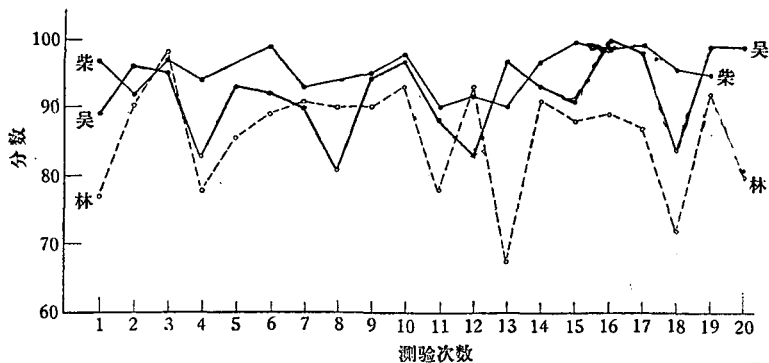


图 2 实线代表学习踏实的学生,虚线代表学习不够踏实的学生

习非常踏实、速度是中等的柴××(见图1, 2)。

图中举了6个有代表性的学生:学习速度快的两个人,一个是快而踏实,另一个是快而不踏实;学习速度中等的两个人,也是一个踏实,一个不踏实;学习慢的两个人,也是一个踏实,一个不踏实的(关于他们的思维品质,在叙述完自学能力成长后一齐讨论)。

从表1可以看见,在老师不讲授、不启发而只给予个别辅导的情况下,学生也能自学我们按“从小步逐渐过渡到大步”原则编写的教材。经过多次测验,平均成绩都是优良,这又再一次证明我们在不同年份在学校中获得的自学效果是可靠的。

(二)小型实验班自学思维能力的成长

表 2 小型实验班自学思维能力的成长

被试代号 做题类别	吴	宋	关	林	徐	柴	鲁	顾	董	朱	秦	雷	阮	戴	史
做对题数	23	15	17	17	16	27	23	18	12	17	18	21	12	22	32
半对半错	3	9	4	5	10	0	2	4	3	4	5	8	3	5	5
全 错	2	13	8	2	7	2	5	13	9	9	14	0	8	6	3
合 计	28	37	29	24	33	29	30	35	20	30	37	29	23	33	40

73、74年,在一七二中学生自学数学快将一年时,为了试验学生自学能力的成长,要求学生自学四省市编的数学教材,实验结果有95%学生能自学分式乘除,有75%学生能自学分式的加减。三中学生自学将满一年半时,要求实验班和对比班都自学北京市编的一元二次方程。实验结果,实验班做对题数对比班多3倍左右。由此可见,采用适当步子编写的自学教材,能够促进学生自学思维能力迅速地成长。

为了更早地检查学生自学能力成长的情况,我们从暑期开始进行的小型实验班的学生,在自学完第一学期自学教材之后,就开始用人教社编的第二册课本进行试验,边阅读边做题,学习时间为3课时(135分钟)。实验结果见表2。刚从小学毕业的学生,可以说一点自学数学的能力都没有,但自学完一学期我们编的自学教材后,从表2看,这些学生也多少有了一些自学能力。即使由于时间短,这种能力还不强,但都有一定的成长。最少也比没有自学过的同学的勇气大多了,他们拿起大步子而没有答案的课本来敢于看下去、做下去,而且是做对的题多,做错的题少。把表1、表2和图结合起来看,在自学中,学生

的思惟品质表现得颇为明显。在我们这种人数不多的被试中，大概有这几种类型：自学速度快、思惟敏捷、理解力强以及记忆广度和持久性都较好。如吴××，他在20次测验中平均为92.1分，在自学能力提高的实验中，他做了28题，全对23题，半对半错的3题，全错的2题。他平常作业中，计算 $(-2)^2(-3)+(-2)(-3)\cdot 1+3(-2)^2$ 这一题，完全用心算，只用45秒钟就一步写出答案-6。又如关××，也是思惟敏捷、理解力强。计算 $(a-b)\cdot (a^2+ab+b^2)$ 的乘方，用笔头比画了两下，就得出 (a^3-b^3) 的结果。林××，自学速度快，思惟敏捷、理解力强，但经常出现粗枝大叶的错误，如错符号，等式去分母时忘了乘等式的右边，一旦稍加指点或暗示，他就立刻懂了。他在20次测验中平均成绩85.9分，从图2可看出，各次测验的成绩如波浪形。他在自学能力提高的实验中，做了24题，做对17题，半对半错5题，全错2题。

学习速度不快也不慢，理解力强，踏实而顽强，认真细致，反复钻研教材之后才做练习。如柴××，在19次测验中，平均成绩94.6分，是全班分数最高者，每次测验都在90分以上，也只是她一个人。在自学能力成长的实验中，她做了29题，全对27题，全错2题，是全班全对最多者(见表2)。学习速度不快而图快，对教材未看懂就想做题，不习惯于认真钻研，稍有困难就问老师和同学。如董××，在19次测验中，平均成绩88分，各次测验成绩如波浪形，忽高忽低。在自学能力成长的实验中，做了20题，12题全对，半对半错3题，全错9题。

学习速度慢，理解力强，踏实认真，有条不紊，做题准确性高，如雷××。在15次测验中，平均成绩92.6分，除两次是80多分外，其余都在90分以上。在自学能力成长的实验中，做了29题，全对21题，半对半错8题，没有1题全错，这也是班中唯一的一个。

自学慢的同学，多数都比较踏实，但也有个别同学是马虎粗心的。如阮××，在15次测验中，平均成绩87.1分，各次测验如波浪形。在自学成长的实验中，做了23题，全对12题，半对半错3题，全错8题。可是这学生在解应用题时，有时与别人不同，能找到别人没有发现的解题途径，看来思惟能力还是不错的。

思惟品质不仅可以从不同的角度来分类，而且还应该追溯这种品质形成的原因与过程，以及在不同的教育条件下是否可以改变、如何改变等问题。我们这次只从学习心理的角度概述一下而已。由于自学教材的内容固定、教法固定、习题量也固定，因此容易观察学生的思惟品质，同时我们也大概了解一下他(她)们在学校中的学习情况。但由于时间短促，我们所描述的只不过是初步观察到的现象，以后还要做进一步的追踪和深入的研究。

三、编写自学教材的一些思惟原则问题

我们在“因式分解的自学实验的比较研究”一文中，提出了八条编写自学教材的心理学原则，有些原则已进行过实验，发表于“促进初中学生自学数学有效心理学原则”一文。现在我们把其中三条编写原则的研究结果进行分析。

1. 按步思惟的原则

学生在解决数学问题时，常常感到不知从何着手。要解决如何着手思惟的问题、思惟的条理性问题，最好就是按步思惟。但按步思惟会不会形成刻板性而妨碍思惟灵活性呢？这是要在实践中认真探索的问题。如，我们在编写因式分解的自学教材时，经常强调

按照因式分解步骤去想题。第一步：不管几项式，首先考虑这个式子有没有公因式，如果有公因式就要先提公因式；第二步：考虑是几项式，如果是二项式就要考虑是不是能用平方差和立方和、立方差的公式去分解，三项式、四项式、五项式又应用什么方法等等；第三步：分得的因式还能分解，就要继续分解；第四步……。同时也给予另外一些题，如，是二项式，但不能用二项式的公式去分解的题，让学生练习，以防止思维刻板性。最后我们用一些比较难的题让学生做，学生都能灵活地加以解决。如，我们用这样一道较难的因式分解的题 $(ac-bd)^2 + (ad+bc)^2$ 来检查学生思维的灵活性。这是一个二项式，但不能用二项式的公式去分解因式，而必须利用乘法公式使每一项得出结果后，再用分组分解法来分解因式。在人大附中（即172中）的自学实验班中，有41人做对，4人未做，3人做错。因式分解是初中代数中较难的章节，错误是常见的事，但是对未做这题的4个程度较差的学生来说，就是因为用按步思维找不到解决问题的方法，从而无法下手，这也许是按步思维产生的副作用。因此在运用按步思维的同时，应多加一些如这一类的题来培养学生思维的灵活性。

强调按步思维，对于一般的因式分解学生们都能分解到质因式，但是对比较复杂、并且较隐蔽的题却不能做到这一点。例如把 $x^8 - 7x^4y^4 + y^8$ 分解因式。这题较难，既不能用三项式的方法去分解因式，又不能单纯用拆中项的办法来解决。在51人中，有27人会分解因式，有11人单纯用拆项的办法，而未能正确分解，不会做的有13人。在会分解因式的27人中，只有9人会把它分解到质因式，有18人把它分成两个因式 $(x^4 + 3x^2y^2 + y^4)(x^4 - 3x^2y^2 + y^4)$ 之后，就没有进一步考虑这个结果是不是质因式，能不能继续分解，而只是简单地看到它不能用三项式的方法去分解，就认为完事了。其实 $x^4 - 3x^2y^2 + y^4$ 还能用拆中项的办法继续分解。事后，我们问过这些学生，他们仍认为分解完了。有些学生说：“哎呀！还能再分呀！从未见过这种继续用拆项的办法再分解的题。”

按步思维对于训练思维的条理性，及对如何着手思维去解决问题会产生一定的积极作用，这一点是要肯定的。但是按步思维是否会妨碍思维的灵活性这一点还应作深入的研究。在我们强调按步思维时，也有不少学生有所创新。如在小学的算术课里学习去括号时，都是先去小括号、其次去中括号、最后去大括号。我们在教有理数和整式时，也是这样强调的。但我们的小实验班的学生宋××，在做这样一道题 $10abc - \{3a^2b - [40abc - (2ab^2 - 3a^2b)]\}$ 时，他把大、中、小括号一齐去掉，迅速合并同类项得出结果。我们问他：“这样一齐去括号不是容易产生符号上的错误吗？”他说：“不会，大括号前面的负号减去中括号前面的负号变正号，括号前面是正号，括号内各数都不变号，那小括号前面仍然是负号，这就可以把三个括号一齐去掉而不会错。”他学会了按步思维，却又灵活地摆脱了按步思维，他的思维多么灵活呀！

不过我们强调按步思维，也不应该忽略对思维灵活性的有意识的培养，不要使一个原则绝对化。

2. 可逆性联想的原则

可逆性联想是数学思维的一条重要的原则。如加与减、乘与除、乘方与开方、指数与对数，以及几何中原定理与逆定理等等，都是互逆的。但是可逆性联想的形成是不容易的。例如，有些学生学过乘方，也学过开方，后来忘了开平方的方法，他就不会利用可逆性联想从乘方乘出的数来推出开平方的公式来。

在我们的自学课本和一般的课本中,学习积乘方的公式 $(ab)^2 = a^2b^2$ 时,都没有教过 $a^2b^2 = (ab)^2$ 这样逆转的式子,只是到因式分解时才教。但我们在学乘法公式时,有这样一道计算题 $(x+1)^2(x^2-x+1)^2$ 要用公式计算。在人大附中的实验班中,除极个别的学生外,几乎都问这道题怎样做。我们最初怀疑他们是忘了乘法公式,于是让他们做 $(x+1)(x^2-x+1)$ 这道题,他们立刻正确得出 x^3-1 。因此不会做的原因是不会运用可逆性联想,即不会把 $(x+1)^2(x^2-x+1)^2$ 变成 $[(x+1)(x^2-x+1)]^2$ 来应用乘法公式去计算。

在我们暑期开办的小型实验班中,凡是学到了这一类题,学生都不会做。我们问: $(ab)^2 = ?$ 他们知道 $(ab)^2 = a^2b^2$ 。我们说,既然 $(ab)^2 = a^2b^2$ 你懂了,那么 $a^2b^2 = (ab)^2$ 行不行? 他们说:“行,但过去不知道。”由此可见,在数学思维中,可逆性联想是重要的。应该有意识地从每个具体公式、定理的可逆性出发,逐渐培养学生具有高度概括性的可逆性联想。因此可逆性联想这条思维原则应该成为编写教材的一个原则。

3. 尽量采用变式的复习,避免机械性重复

学生在小学学分数的时候,老师就教会他们,当分子为零时分数没有意义。初中代数时,也强调分母不能为零。因此,在简单的分式题,如 $\frac{1}{x(x+1)}$,学生都知道 $x=0$, $x=-1$ 时,这式子没有意义,即使犯错误也是由于粗心引起的。因此,课本中都用这类题来复习分式中分母为零时,分式没意义的概念。可是我们却用一道繁分来测验我们自学班学生,看看他们是不是能找出 $x=?$ 时,这繁分没有意义。题是这样的:“ x 为何值时,

分式 $\frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{x+1}}}}$ 没有意义?”

$$\left[\text{解: } \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{x+1}}}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{x+2}{x+1}}} = \frac{1}{1 + \frac{x+1}{x+2}} = \frac{1}{\frac{2x+3}{x+2}} = \frac{x+2}{2x+3} \right]$$

解出这道繁分就很清楚地看到, $x=-1$, $x=-2$, $x=-\frac{3}{2}$ 时,这繁分式没有意义。

表 3 x 等于什么,这繁分没有意义?

做题结果类别	全对	$x=-1, -\frac{2}{3}$	$x=-1$	$x=-\frac{3}{2}$	$x=-2$	全错	合计
人数	3	1	11	21	1	6	43

从表 3 可以看见,全对只有 3 人。有 11 个学生看这繁分的最初的分母是 $x+1$,就写 $x=-1$ 时,这分式没有意义,不再化简来进一步思考了。有 21 个学生把演算到最后的分母 $2x+3$,就写 $x=-\frac{3}{2}$ 时,这分式没有意义。他们都不考虑在这三个分母的根当中,只

要有一个分母的根为零时, 这繁分式都没有意义。这种以偏概全的现象在初中学生中是最常见的现象。

如果多做一些这样变式的题, 既可以复习繁分的计算, 也可以复习分式有意义的条件。这样做不仅避免了机械性的重复, 而且培养了学生把两种或几种已经掌握的知识应用于解决问题的能力, 这对于培养创造性的思维和思维的灵活性会起到一定的积极作用。

四、初步结论

1. 自定步调的自学实验中, 学习能力的差异是十分明显的。快者和慢者的速度相差一倍以上。

2. 自学实验的教材、教法、心理学原则和习题都是固定的, 因此利用自学, 容易从学习的角度来区分出学生的学习类型。

3. 自学了我们编写的自学教材一学期内容后, 自学思维能力的成长已能看出苗头来了。

4. 在我们编写自学教材的心理学原则中, 如按步思维、可逆性联想、利用变式复习等原则, 都证明是编写数学自学教材的重要原则, 这对于培养学生的思维能力起着积极作用。但是, 对于这些原则的运用都不应该绝对化, 它们本身都有其局限性。

这个小型实验的初步结果说明, 通过学生自学数学来研究他们的某些思维发展规律是可能的, 但还需要进一步继续探索。