

通过样例和问题解决建立产生式¹⁾

朱新明* 秦裕林** 施铁如*** 司马贺****

摘 要

我们对学生通过例题和问题学习学科知识的问题作了一些实验研究。本文介绍了其中的一项研究结果。结果表明：学生以这种形式进行学习，只要例题和问题安排得合适，学生能较快地和较好地掌握有关知识。学生不仅学会了解决问题，而且能从中总结出某些解题策略和启发式规则，并能调用新建立的启发式规则指导解题，从而加速了解题的进程。

本文还讨论了学生在这种学习情境中的学习过程。依据本实验所揭示的人对符号产生式建立的一般过程和有效的训练示例，为计算机模拟人的学习提供了某些依据。

一 问 题

学习是人类的基本智能活动。学习是心理学传统的研究课题。心理学上的各家各派依据他们的实验，各自提出自己的学习理论。

目前，学习问题的研究成了认知心理学界和人工智能学界的热门课题。智能计算机研制的一个重要目标就是使计算机具有学习联想推理等功能。因此人工智能学界都很关心人的学习联想等过程。近年来根据已经解答出的问题作为例题进行学习(以下简称“例中学”，Learning from examples)和通过学生自己解决问题进行学习(以下简称“做中学”，Learning by doing)受到认知科学界和人工智能学界的注意(Anzai 1978; Neves, 1978; Anzai and Simon, 1979; Neves and Anderson, 1981)^[1,2]。按信息加工学派的观点，人类是运用产生式来解决问题的。所谓产生式，简单说来，就是“条件—动作”对。产生式是表达知识的一种方式，每当一个产生式的条件得到满足时，就执行该产生式的动作。解决问题的产生式如何建立是学习问题的核心。Anzai和Simon在一项做中学的研究中，让被试解决河内塔问题，被试通过解决这个问题，摸索出几种解决这个问题的策略。最后，被试竟学会了用递归的方法解决这个问题。朱新明在1960年初所做的一项练中学的研究中，安排一组被试不听老师的讲解，只是通过看人做题和自己做题进行学习。上述一些实验表明被试通过看样例和通过解题，可以从中学到一些知识和策略。这种学习过程，特别是在学科知识的学习中产生式建立的过程，尚有待作更多的研究。本

1) 本文于1986年4月1日收到。

* 中国科学院心理研究所北京 ** 北京航空学院 *** 广东教育学院 **** (美)卡内基—梅隆大学。清华大学曹南燕同志参加了本研究的部份工作。

研究主要以二次三项式因式分解产生式的建立作为研究课题。其中有关确定因式中正负号的产生式简称为符号产生式。本文主要介绍符号产生式建立的部分结果。

二 方 法

1. 学习内容： x 的二次项的系数为一的二次三项式($x^2 + Ax + B$)因式分解的符号产生式知识。为行文方便,约定 A, B, C, D 等大写字母表示代数量,可以为正,也可以为负,而用相应的小写字母表示绝对值,如用 a 代表 $|A|$, b 代表 $|B|$ 等,有时为了突出符号,在小写字母前:标明正负号来记二次三项式,如 $x^2 - ax + b$ 。因此所谓“ a 的系数为负”,“ $A < 0$ ”“ A 为负”,“ A 是负号”等含义相同。

2. 被试:初中一年级二十位中等程度的学生。

3. 方式:采取个别实验,在实验时,不给被试有关该符号产生式知识的讲解,只要求被试根据所提供的样例和通过解决规定的一系列问题进行学习。要求他们一边学一边出声想。通过录音记录被试学习过程中的口语叙述。

4. 步骤:

第一步:检查和挑选被试:通过检查,挑选那些确实没学过该符号产生式知识的学生作为被试。检查的项目有式子题,也有文字题(题目见附录)。

第二步:按照规定的例题和通过系列问题进行学习。

第三步:学习后的即时测查,即通过第二步的学习后的即时测查,测查的项目还是第一步检查时用过的题。目的是检查通过第二步的学习后,是否学到了知识和学了多少知识。

三 结果及对口语材料的分析

1. 学习结果

学习前的测查表明,被试不会解测查中的问题,五个产生式一个也没有建立起来。经25分钟的学习,学习后测查结果表明,20个被试都能正确地解答测查中的五道式子题,并在20个项目的填空题或选择题中,平均能对其中的15个项目作出正确地填空或选择。这表明这些被试在不同的程度上学会了解题的策略和相应的五个产生式。可以看到他们通过新建立起来的产生式逐步发展了他们的解题技能。搜索速度随训练而加快,搜索过程开始长,后来短(见图2)。最后通过口述报告可以看到被试调用新建立的符号产生式解题,其内部的信息加工过程如图1。

图1说的是当被试已经建立了该符号产生式后,解题时在被试头脑中所发生的信息加工过程。具体说来,就是每当输入一个问题时,被试首先就问该题的常数项是正号还是负号,接着又问一次项的系数是正号还是负号,然后再决定常数项所分解的 C 和 D 是什么符号。

因式分解过程实际上是因数代数值 C 和 D 的搜索过程。如用尝试错误法搜索,则搜索量较大。现建立了启发式规则(即符号产生式),这样就压缩了搜索过程。

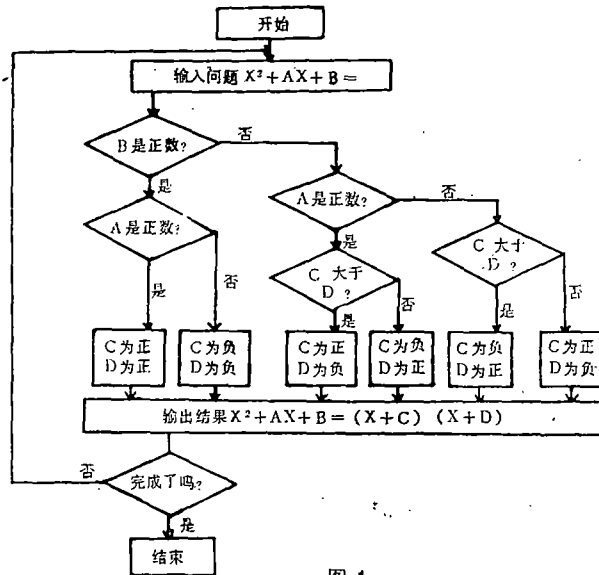


图 1

注: C 大于 D 应为 $|C|$ 大于 $|D|$ 。

2. 学习过程

通过口语材料的分析,可以看到在对比示例的例中学或做中学的条件下,被试对符号产生式的建立过程。例中学的过程是:

(1)比较样例,找其间的差别和联系,(2)提取有关的知识或进行尝试操作而加以理解;(3)形成假设或初步归纳出产生式规则;(4)应用规则解题,在应用过程中进行检验,并逐步发展解题策略。如果有形式归纳,则在应用过程中加以修正。

做中学过程的第一步是搜索,提取先前的知识或以尝试错误的方式在问题的空间中进行搜索。如搜索成功,则可作为样例。

3. 口语材料分析

下面引个案材料加以说明,先看看第三个产生式建立的过程。第三个产生式指的是在对 $x^2 - ax + b$ 的二次三项式分解因式时,如一次项的系数为负且常数项为正时,那么要把常数项分解为两个负的因数。

口语材料表明,被试看了如下两个样例:

$$x^2 + ax + b = (x + c)(x + d)$$

$x^2 - ax + b = (x - c)(x - d)$, 通过比较样例等式的左边和右边,注意到等式左边一次项的系数是负号时,那么等式右边的两个因数, C 和 D 前面都是负号。然后被试根据多项式乘法知识,尝试地把 $(x - c)$ 与 $(x - d)$ 相乘,被试从中知道, $(-c) \cdot (-d) = +b$, $(-c) + (-d) = -a$ 。在这样的基础上,被试就提出了假设或初步归纳出规则,即如果 A 是负的,那么就要把等式右边的两个因数定为负的。最后他把这一规则应用于解题或考察其他样例,从中加以检验。通过检验就加强了这一符号产生式的条件与动作的联结。被试就是这样把表达左边的特点作为该产生式动作的条件,归纳出第三个产生式(以上参看表 1 中 12—20 条语句)。

在做中学的情况下,第一步是搜索,例如在 $x^2 - ax + b = (x - c)(x - d)$ 这样的问题空间

中进行搜索,为了减少初学者的困难,我们编题时,缩小了这个问题的搜索空间,这样被试即使用尝试错误的方式也可以解题。如搜索成功,他就删去了所有不必要的分支,只留下了成功的搜索途径,这样就等于提供了一个已经解决了的样例,以下的过程与例中学过程同(参看表2中的25—37)。

再看被试学第三组题的情况,让我们先看下面两道题:

$$x^2 + 5x - 6 = (x - 1)(x + 6)$$

$$x^2 - 5x - 6 = (x + 1)(x - 6)$$

一些被试看完这两道题后,注意到常数项是负号时,等式右边常数项所分解的两个因数中,一个是“-”号,另一个是“+”号。有些被试依据题的表面特点作了形式归纳。例如一位被试说:“如果 x^2 后面是“-”号,而且紧接着又是“-”号(产生式的条件),那么,第一括弧中应当是 $(x + \square)$,第二个括弧中应当是 $(x - \square)$ (产生式的动作);如果问题 x^2 后面第一个是正号,第二个是负号(产生式的条件),那么等式右边第一个括号就是负号,第二个括号,就是 x 加上就是正号(产生式的动作)”。然后,这被试把这一规则应用于解题,在实际解题过程中,他发现这形式归纳的规则有错误并加以修正,从而建立了正确的产生式规则(参阅表3,46—49;61;79—81;和91—98)。

被试修改后的产生式如下:“如果 x^2 后面是“+”号,紧接着下一个是“-”号,那么这问题的(常数项)分解后,一个因数是正号,另一个因数是负号,但是正的数(正的因数)要大于负的因数。如果问题 x^2 后面两个都是“-”号,那么(常数项所分解的因数)一个应是正号,另一个应当是负号,(而且)负的因数要大于正的因数”(参看表3,91、92、98、93、95、94、96)。

另一被试的口述参见表4,59—62语句。

正确的解题策略和熟练的解题技能不是一开始就有的,而是在解题过程中逐步形成和发展起来的。例如分解 $x^2 + ax + b$ 这类题的正确策略应当是先分解常数项,这样将有效地缩小问题的搜索空间。但在解决这个问题时,有些人开始是分一次项的系数,然后把所分的两个数的乘积再与常数项进行匹配。例如被试C在解 $x^2 + 9x + 18$ 时,她把9分别地分为 $1 + 8$; $2 + 7$; $3 + 6$,然后再把乘积一一与常数项匹配。以这种方式分解因式,她碰到了困难,后来她才慢慢过渡到先分解常数项的策略(参看表5,5—7)。其他被试也有这种情况。

从口语材料及被试的整个解题过程中,可以看到这种学习方式能促使被试积极主动地探索产生式的动作与相应条件的联系。知识的掌握是学生自己推导得来的,因此理解得比较深,记得比较牢。特别是在解题过程中,学生对于产生式的条件与动作的判断,不断地受到训练,从而能把产生式的不同动作与相对应的条件联系起来。另外被试在这种形式的学习过程中,靠被试本人与问题解决过程中所提供的反馈信息交互作用实现学习,同时把输入的信息与调用先前的知识联系起来进行加工理解。

口语材料的分析还表明,这种学习形式把学习和问题解决交织在一起。问题解决过程包含有一种逐渐学习的过程,而学习的过程也包含有一种逐渐发现和解决问题的过程,被试在这种过程中学到了知识和策略,发展了技能。

本实验所揭示的人对符号产生式建立的一般过程和有效的训练示例,为计算机模拟

提供了某些依据。而模拟实验反过来,在一定程度上验证了人的学习过程对因式分解符号产生式的建立过程*。

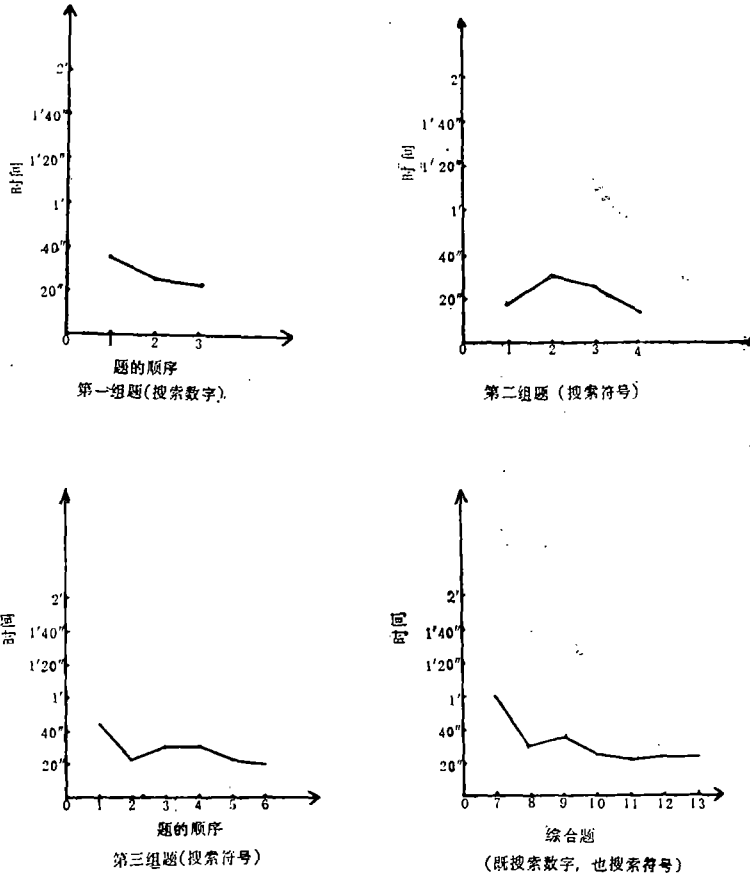


图 2 一个被试的搜索时间曲线

附录 学习前的检查题和学习后的测验题

_____ 学校 _____ 班 姓名 _____ 日期 _____

- (一) 分解因式: (1) $x^2+7x-18=$
 (2) $x^2-2x-8=$
 (3) $x^2+x-20=$
 (4) $x^2-5x-36=$
 (5) $x^2-9x+14=$

- (二) (1) 如果: 对 x^2+5x+6 型的二次三项式分解因式(x^2 的系数为1)
 那么: 把 x^2 分解为_____. 把常数项分解为_____个因数的_____(积,和,商), 而这_____个因数的_____(和积商)恰好_____一次项的系数.
- (2) 如果: 常数项为正数,
 那么: 要把常数项分解为两个_____(异,同)号的因数.

* 杨忠祥、秦裕林、朱新明, 因式分解问题求解学习系统, 中国人工智能学会第四届学术会议论文.

- 如果：常数项为正数，并且一次项的系数也是正数。
 那么：要把常数项分解为两个_____（正、负）的因数。
- (3) 如果：常数项为正数，一次项的系数是负数，
 那么：要把常数项分解为两个_____（正、负）的因数。
- (4) 如果：常数项为负数，一次项的系数是正数，(例： $x^2+4x-12$)，
 那么：常数项所分解的两个因数应当_____号(同，异)，并且正的因数的绝对值比负的因数的绝对值_____。
- (5) 如果：常数项是负数，一次项的系数也是负的(例： $x^2-4x-12$)，
 那么：常数项所分解的两个因数应当_____号(异，同)，并且负的因数的绝对值比正的因数的绝对值_____。

表 1 被试 C 学习第二组题的口语记录

- 〔看第 2 组例题〕
12. 〔第二个例题〕中间是“-”号，分解出来的两(指常数项分出来的二个因子)也是“-”号。
13. 这题〔第四个例题〕也是一样的。
 〔做第二组练习题〕
14. 〔做第一题， $x^2+9x+18=(x-3)(x-6)$ 〕，9 可以分解为 3+6，18 等于 3×6，所以就是 $(x+3)(x+6)$
5. 〔第二题， $x^2-9x+18=(x-3)(x-6)$ 〕，〔第二题〕根据上面的例题得出的数中间是“-”号，两个多项式常数项(指两个因子)的前面都是“-”号，所以根据例题也可以算出 $(x-3)(x-6)$ ，
16. 〔第三题 $x^2-11x+18=(x-2)(x-9)$ 〕，第三题和第二题同样，11 是 2+9，等于 11，18 是 2×9 等于 18，中间是“-”号，所以多项式常数项前面必须是“-”号，所以写成 $(x-2)(x-9)$ 。
17. 第四题比较容易了，把“-”号改成“+”号， $(x+2)(x+9)$ (主试问：你摸到什么规律?)
18. 主要要看一次项前面是“+”号。
19. (如果一次项前面的系数是“+”号)，那么，常数项前面(指所分解的因子)都是“+”号。(在思考)
20. 例如： x^2-7x+6 ，这道题这个一次项前面是“-”号，多项式前面(指因数)都是“-”号，它们两个数相乘应该是等于正数，所以，这个常数项前面是“+”号。

表 2 被试 A 学习第二组题的口语记录

25. 〔做第一题， $x^2+5x+6=(x-2)(x-3)$ 〕这里填“+”号
26. 根据……根据刚才的规律，就是正的加上正的等于正的 $5x$ 。
27. 正 2 乘正 3 等于正 6。
28. 这个题可能是……负的，嗯(停)不，不是负的。
29. 这道题(指第二题， $x^2-5x+6=(x-2)(x-3)$)都应填负的。
30. 因为 $-2x+(-3x)=-5x$ ， $(-2)×(-3)$ 等正的，也就是它等于正 6。
31. 〔做第三题， $x^2+7x+6=(x-1)(x-6)$ 〕都填正号。
32. 〔做第四题， $x^2-7x+6=(x-1)(x-6)$ 〕，都填负号，跟上面第二题一样。〔做第二组中的一些练习〕
 〔主试：你做这些题掌握了什么规律?〕
37. 掌握…… x^2 减去 $9x$ ……这是负的，后面是正的， x 括号里面都是 x 减去， $x-3$ ， $x-6$ ，括号里面都是负号。
38. ……

表 3 一被试学习第三组题的口语记录

〔解第三组题〕

39. 〔解第一题, $x^2+5x-6=(x-1)(x-6)$ 〕等于 x …啊… x …减,加,是一个正号,一个负号…啊! 不对,这是负号,这是正号。
40. 〔主试问: 为什么?〕因为这个正 $1x$ 加上负的 x ,就不等于正 $5x$ 。
41. 所以应该是负 1 ,负 1 呢,负 $1x$ 加上正 $6x$ 。
42. 正的呢,加上负的就等于减去 1 ,就等于 $5x$,这样才对了。
43. 〔第二题〕 x^2-5x-6 就等于… x 加 1 (乘) x 减 6 …对!。
44. 第三题〔 x^2+5x-6 〕就等于… x 减 1 , x 加 6 。
45. 第四题〔 x^2-x-6 〕就等于 x …加 2 (乘) x 减 3 。
46. 〔主试问: 你得出了什么规律?〕
47. 这个题要是连减的形式呢,……那就是 x 加,就是正号,第二个括号就是 x 减去,是负号。
48. 要是多项式 x^2 加上,第一个是正号,第二个是减去,是负号。
49. 那么这个后面得出的,第一括号呢?就是 x 减 2 ,减去,就是负号,第二个括号呢,就是 x 加上,就是正号…。
61. 〔练习第10题〕 x^2-2x-8 等于 x 加上… x 加上 4 , x 减去 2 。
79. 〔练习第10题〕 x … 1 个(因数)是正的… x 加 4 , x 减 2 呢,正 4 加上负 2 等 4 减 2 。
80. 这道题错了,〔停〕,应该是 x 加 2 乘 x 减 4 。
81. 正 2 加上负 4 等于负 2 , 2 乘负 4 等于负 8 。
91. 在第三组题中,这个 x^2 后面是正号的,第二个也是负号的。
92. 那么,它因式分解后,一定是一个是正号,一个是负号。
93. 要是多项式里面都是负号。
94. 那么它因式分解的这两个括号里的也一定是一个正号,一个是负号。
95. (至于)连减的多项式呢?
96. 它的负号这个数字比正号这个数字要大。
97. 那个 x^2 后面是正号,第二个符号是负的。
98. 那么,它的因式分解两个括号里,一个是正号,一个是负号,它这个正号呢,要比负号数字大。

表 4 被试B学习第三组题时的口语记录

59. (主试问: 你摸到什么规律?)
- 首先我得把这些数(手指 x 一次项的系数和常数项)看清楚,它们究竟是正数还是负数。
60. 如果 x 的一次项的系数是正的,常数项是负的,嗯!(停)
61. 这里面就有一个…这个 x 是 $+1$, $x-6$ 。这里面应该是一正一负…
62. 第二题呢?都是负的,这里面也有一正一负,只不过是正的是大数,负的是小数。

表 5 被试C学习第一组题时的口语记录

〔做第一组题的练习题〕

5. 〔第二题, $x^2+9x+18=(x+)(x+)$ 〕, $9x$ 可以分成为 $1+8; 2+7; 3+6$ (被试同时把这些数写在练习卷的旁边), 18 可以分为 3×6 ; 所以,这就是 3 和 6 相乘,就是 $(x+3)(x+6)$ 。
6. 〔第三题, $x^2+19x+18=(x+)(x+)$ 〕, 19 可以分成 $3+16; 4+15$ (想)先别看 19 ,先看看 18 。
7. 18 可以 1×18 , 19 可以分成 $1+18$ 。啊!这就符合题意了,就可以写成 $(x+1)(x+18)$ 。

表 6 被试 B 学习第一组题时的口语记录

〔做中学〕

1. 〔做第一组第 1 题, $x^2+5x+6=(x+ \quad)(x+ \quad)$ 〕, 〔等于 x 加 2 和 x 加……加 3。〕
2. 〔做第 2 题, $x^2+7x+6=(x+ \quad)(x+ \quad)$ 〕, 它等于 x 加 4, $x+3$
3. 不对, 我想, 如果这是 4, 这里是 3, 加起来是 $7x$, 可是对不上这个数(指常数项)(停)…… $7x$ 加 6 ……
〔做第 4 题, 他写: $x^2+7x+12=(x+4)(x+3)$ 〕
4. 〔做第 5 题, $x^2+13x+12=(x+6)(x+7)$ 〕这跟上面一样, 对不上! 这可以变成负数吗? ……
6. 如果这个是 6, 那个是 7, 跟这对不上, 一乘就是 42, 跟这个(指常数项)对不上 ……

参 考 文 献

- (1) Anzai, Y. and Simon, H. A., *Psychological Review* 1979, 86, 124—140.
- (2) Neves, D. M. and Anderson, J. R., In J. R. Anderson (ed) *Cognitive Skills and Their Acquisition* Hillsdale, N. J. Lawrence Erlbaum Associates 57—84, 1981.

LEARNING TO BUILD PRODUCTIONS FROM EXAMPLE
AND BY PROBLEM SOLVING

Zhu Xinming

Qin Yulin

(Institute of Psychology, Academia Sinica) (Beijing Institute of Aeronautics and Astronautics)

Shi Tieru

Herbert A. Simon

*(Guang dong Institute of Education)**(Carnegie-Mellon University)*

Abstract

In this paper we report one of a number of experiments with high school students on learning from examples and learning by working through problems. The test results and protocols indicate that as long as the examples are appropriate and the problems are well arranged, most of the students master the knowledge quite well within a short time by working through some examples and problems. The students not only learned how to solve problems, but also could induce problem solving strategies, the symbolic production rules, with which they direct further problem solving. Thus speeding up the problem solving procedure.

We also discussed the process of learning from examples and learning by working through problems.