

小学生数学问题解决与心理表征

纪桂萍 焦书兰 何海东

中国科学院心理研究所

摘要 本研究的目的是揭示数学能力和心理表征之间的关系。我们的假设是数学成绩好的儿童心理表征能力也强。参加实验的被试是64名在校的小学5年级学生,他们的年龄是11—12岁,男女各半。数学测验包括两部分,一部分是需要直接空间表象操作的题目,另一部分是需要逻辑推理和图式知识进行计算的应用题。心理表征能力用的是两项空间表象操作测验:Form Board Test(FT)和Surface Development Test(ST)。结果表明儿童的数学测验成绩和空间表征能力呈正相关,数学测验成绩得分高的儿童空间表征测验的得分也高,说明小学生数学问题解决能力与空间表象操作能力有密切的关系。

关键词 问题解决 心理表征 空间表象 心理操作

一 问题的提出

近几年来对我国独生和非独生儿童认知能力的发展进行的比较研究表明,数学作为基本的认知能力之一,与语言理解能力和一般常识等方面有着密切的关系。关于数学问题解决过程的因素,是发展心理学和认知心理学等领域所关心的热门话题之一,在这方面,国内外学者进行了许多研究,取得了一些共识。

Mayer等人研究了解决数学问题所需要的知识性质,他们认为,数学问题解决有四个基本过程,即转化过程、了解过程、计划过程和执行过程。转化过程把言语描述的问题转化为内部表征;了解过程把这些内部表征组织成有条理的结构;计划过程运用策略知识来谋划利用这些内部表征达到问题解决的思路和方法;执行过程则包括问题解决过程中需要的运算知识。内部表征能力被认为是解

决数学问题的重要因素。

传统的数学问题解决研究,往往忽略数学问题解决能力和其它一些基本认知能力的关系。

我们知道,内部表征既包括符号概念系统,也包括空间表象,特别是在几何问题等涉及具体形象操作的问题中,空间表象能力是很重要的因素。关于这方面,国内心理学家进行过一些研究,施建农等曾专门研究过小学生空间表征与解决几何问题能力,结果证明两者之间具有很高的相关性。事实上,除了几何问题,许多数学问题,特别是应用数学题,也需要学生具有较好的相关的表象操作能力。在本研究中,我们引用了两套空间表象能力测验,进一步考察空间表象能力与综合数学问题解决能力之间的关系。

二 研究方法

1. 被试:

本研究在北京市城区四所小学校中进行,参加实验的被试是64名在校五年级学生,男女各半,年龄11—12岁。根据学生平时数学测验的成绩,由教师事先将学生分为优秀组和差组,每组32名,学生本人不知道分组及分组的标准。

2. 测验材料:

(1)综合数学测验

这组数学问题是实验者自行编制的,在小学五年级数学教材中属于中等水平的题目。其中一部分题目需要直接的空间表象操作,另外一部分题目需要逻辑推理和图式知识。前一部分题目要求被试不能直接画图,只能在头脑中进行操作,例如,“不要画图,请你想一想计算这个图形的面积可能有几种方法,想出一种告诉我一种”。(见图1)

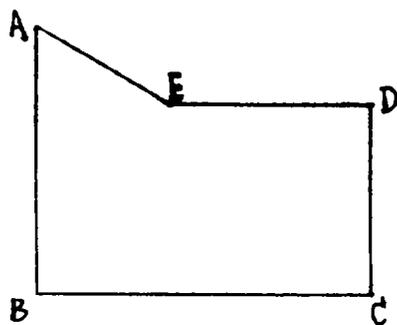


图1

另一部分题目是一些需要应用图式知识进行计算的数学应用题,例如,“做一个棱长是4.5分米的正方形纸盒,至少需要多少平方分米的纸板?”

(2)空间表象能力测验

a. Form Board Test (FT) 见图2,要求学生从几个备选图形中找出正好能拼成某种图形的各个部分,在被选中的图形下面的小方框中划一个“+”,不需要的图形则画一个“-”。在这种测验中,学生必须对某些备选图形进行空间旋转方可达到目的。

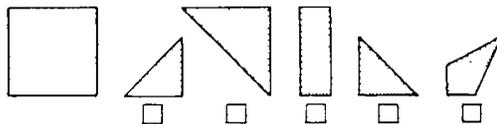


图2 FT 测验示例

b. Surface Development Test (ST) 见图3,要求学生从右边的立体图形中找出与左边展开图形上的数字相对应的边,如左图中的边“1”,对应于右图中的边“B”。学生必须将左图在头脑中“折叠”成右边的立体图。

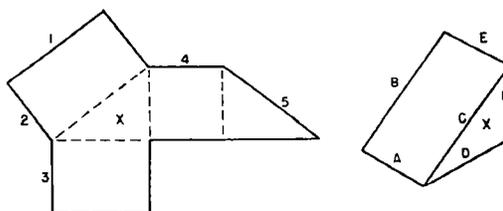


图3 ST 测验示例

以上两种测验均不允许在纸上划,只能进行心理操作。

3. 测验程序

测验在学生熟悉的教室中进行,组内设计一次完成。先作空间表象能力测验,测验FT限时8分钟,测验ST限时6分钟。然后进行数学测验,数学测验不限时间,一般在30—40分钟之内都能完成。主试在每项实验之前都要向学生说明测验过程,直到学生完全明白才开始正式实验。主试对学生解题过程中的言语和行为进行简单的记录。

三 结果

被试各项成绩的得分如表1:

表1 按性别和平时成绩在三项测验上的平均得分

测验项目	性 别		平时成绩	
	男	女	优秀	差
数学	108.28	95.23	130.38	68.41
ST	9.91	8.03	10.77	6.79
FT	6.00	4.34	6.02	4.13

对三种测验成绩进行平时成绩×性别的二因素 MANOVA 分析, 所得结果(见表 2)表明, 平时成绩在三项测验上的主效应都达到了显著性水平, 在数学测验上的主效应为 $F(1, 59) = 75.678, P < .000$; 在 ST 测验上的主效应为 $F(1, 59) = 10.584, P < .002$; 在 FT 测验上的主效应为 $F(1, 59) = 7.389, P < .009$ 。平时成绩好的学生在各项测验上的分数均优于平时成绩差的学生。

表2 分别对三项测验成绩的 MANOVA 分析结果

效 应	自由度	F 值	显著性
数学			
平时成绩主效应	(1, 59)	75.594	.000
性别主效应	(1, 59)	2.328	.132
平时成绩×性别交互作用	(1, 59)	1.116	.295
ST			
平时成绩主效应	(1, 59)	10.584	.002
性别主效应	(1, 59)	1.972	.165
平时成绩×性别交互作用	(1, 59)	.529	.470
FT			
平时成绩主效应	(1, 59)	7.389	.009
性别主效应	(1, 59)	4.326	.042
平时成绩×性别交互作用	(1, 59)	.017	.897

数学测验成绩和两项空间表象操作能力测验成绩的相关也都达到了显著性水平(见表 3), 表明数学测验成绩好的学生其空间表象操作能力也好。

表3 数学和表象操作能力测验的相关

	数学	ST
ST	.3969 **	
FT	.3383 *	.3730 *

** $P < .01$

* $P < .05$

在本研究中, 性别因素的主效应不是很

明显, 只是在 FT 测验中达到了显著水平: $F(1, 59) = 4.326, P < .042$ 。

四 讨论

关于数学成绩和空间表象操作能力之间的关系, 一般都认为两者是密切相关的, 空间表象操作能力有助于数学问题的解决^[1]。本研究将数学问题分为需要直接进行空间表象操作的问题和需要逻辑推理和图式知识的问题。勿容置疑, 前一类问题, 空间表象操作能力的高低是决定问题解决的重要因素。对后一类问题, 空间表象操作能力的高低又有什么关系呢? 我们知道, 问题表征是问题解决的基本环节, 一个好的问题表征将会导致高效率的解决问题。在数学问题解决中, 人的问题表征系统是很复杂的, 莱什(1979)将这些表征系统分为包括操作材料和静止的图式模型(即图画)的肖像方式, 以及包括出声语言和书面符号的符号方式^[2]。这些可以称之为形象表征系统。更抽象的概念等, 我们可以称之为抽象表征系统。形象表征系统和抽象表征系统构成了一个完整的表征系统, 而形象表征与抽象表征之间以及形象表征的各种形式之间是可以相互影响和相互转换的。借助一个好的形象表征, 学生可以形成一个有效的抽象表征, 从而更好了解问题解决的实质和关键然后再借助形象表征的各种方式, 达到对问题的解决。在很多情形中, 形象表征还可能有助于减少记忆负荷或提高贮存能力, 以更具操作性和简化复杂关系的形式对信息进行编码和处理。

不同的形象表征系统之间也是可以互相影响和转换的。根据问题的不同, 一个问题的解决一般是几种表征系统的综合。空间图形表象作为一种形象表征系统, 在数学问题解决中是非常重要的。抽象的数学概念, 往往需要借助具体的思维才能理解; 抽象的数学关系, 也必须用符号和图解进行说明。尤其是小学生的思维具有具体形象性的特点, 离开一

些具体的思维表征方式,他们往往很难解决数学问题。根据对学生的观察纪录,平时成绩好的学生在解决后一类应用问题的时候,要么将一些关系用符号形式写在纸上,要么自言自语说出些关系。我们可以推测,学生在进行这些活动的同时,头脑中会出现一些相应的形象,而平时成绩差的学生,大多数不能建立这种关系。正如我们的统计分析中只谈到空间表象操作能力和数学问题解决能力之间的相关一样,我们这里也只能说两者之间有关,到底空间表象操作能力在这其中起到多大的作用,以后还需作进一步的研究。对前一类问题的解决,空间表象操作能力的作用正如我们所期望的那样要更明显一些。例如对问题“在直角三角形中,只能有一个直角,在钝角三角形中,只能有一个钝角,为什么?”平时成绩好的学生一般能根据三角形的定义,说出这是因为“三角形的三个内角之和等于 180° ”,有的学生还进一步说明:“如果有两个直角或钝角,三角形就连不到一块了”。平时成绩差的学生除一部分也能根据定义说出原因外,大部分不知怎么回答这个问题。

最后,我们要简单谈一谈性别差异的问题。一般的观点认为,男孩的空间思维能力比女孩强,在我们对独生子女与非独生子女认知能力发展的研究中,也发现男孩的空间关系得分明显优于女孩。本研究的结果似乎没有表现出较强的“男孩优势”,虽然男孩子得分略高于女孩,但只是在 FT 测验一项上显

著高于女孩,而在 ST 和数学测验上两者均没有显著差异。

五 结论

1. 小学生数学问题解决能力与空间表象操作能力有密切的关系。由于小学生的思维具有具体形象性的特点,图形表象是小学生问题解决过程中的一种重要表征系统。

2. 在本研究中没有表现出较强的空间能力“男孩优势”倾向,只在 FT 测验一项上男孩得分优于女孩。

参考文献

- [1]李文馥,8-13岁儿童空间表象发展的研究,心理学报, No. 19, 1987(1), 10-17。
- [2]李文馥、徐凡等,3-7岁儿童空间表象特点比较,心理学报, No. 21, 1989(4), 419-426。
- [3]徐凡、施建农,4-5年级学生的空间表征与几何能力的相关性研究,心理学报, No. 24, 1992(1), 20-27。
- [4]徐凡、李文馥等,6-12岁儿童识图能力的发展,心理学报, No. 23, 1991(1), 10-17。
- [5]焦书兰、纪桂萍、荆其诚,独生与非独生儿童认知发展的比较研究,心理学报, No. 24, 1992(1), 12-19。
- [6]克鲁切茨基著,赵裕春等译,中小学生学习能力心理学,科学教育出版社,1984,北京。
- [7]理查德·莱什、玛莎·兰多著,孙昌识等译,数学概念和程序的获得,山东教育出版社:1991,济南。
- [8]Mayer, R. E., Larkin, J. H., & Kadane, J. B. (1984). A Cognitive Analysis of Mathematical Problem-solving Ability. In R. J. Sternberh (Ed.), *Advances in the Psychology of Human Intelligence* (Vol. 2, 231 - 273). Hillsdale, NJ: Erlbaum.