算术应用题理解的几个理论模型

周治金　陈永明

许多研究发现，对幼儿园和小学的儿童来说，解决算术应用题比解决算术题难得多(Carpenter，Corbitt等，1980)[①]。很多学生知道怎么样运用基本的算术程序去解决以数字和符号形式呈现的算术题，却不能运用这个程序去解决以文字形式呈现的算术应用题。这说明儿童在解决算术应用题时出现困难，不是因为他们没有掌握基本的算术运算技能。对于这种困难有两种解释：一些人认为，逻辑—数学方面知识的缺乏是儿童难以解决应用题的原因；另一些人认为，缺乏对语言理解的技能是儿童难以解决应用题的原因。

儿童在问题中所犯错误可能反映了语义知识方面的缺乏或逻辑—数学知识方面的缺乏，或两者皆缺乏。为了区分这两者，一些研究者操纵应用题中所用词语以观察学生解题作业成绩的变化。

例如，考虑如下问题：

有5只鸟和3只虫

鸟比虫多多少？

这是一个比较困难的问题，从托儿所的孩子到一年级的孩子正确率为17%—64%。从逻辑—数学发展的观点来看，这个问题之所以困难，是因为它要求孩子对部分—整体关系要有详尽的理解，托儿所孩子可能不具备这种理解能力。然而，Hudson(1983)报告[②]，当最后一行的语言表述改为：

有多少鸟吃不到虫子？

儿童作业成绩急剧改观，正确率为83%—100%。即使是托儿所的孩子在解决后一个问题时也表现出了复杂的关于集概念方面知识。类似的经验性结果都说明语言表述方面的某些改变确确实实改善了儿童的解题作业。

对算术应用题语言特性方面的早期研究集中在确定哪些问题特征使得算术应用题变难。例如，单词的平均长度，问题中算术计算的操作步数，问题中句子的数量，每个句子中字词的数量，以及名词、动词、连词出现的频率等。研究发现，语言特征方面影响算术应用题难度的最重要的因素是计算步骤的多少和算术术语(如直径或余数)的多少。

后来的研究发现，算术应用题的语义结构是影响算术应用题难度更为重要的因素。所谓语义结构是指对问题进行陈述的句子的含义和它们之间的相互关系。Riley及其同事[③]，根据语义结构将加减法应用题分为三类：转换(change)，合并(combine)，比较

(compare)。转换问题暗含某种转换操作行为，转换问题有转入和转出二类。合并问题包含所陈述的状态之间的关系，但没有转换问题中的转换行为。合并问题中不需要变换个人原来所有，但需要表征几个分集之总数量的合集。转换和合并问题所进行的算术加减运算虽然相同（如 5 + 2 = ?），但是两类问题中所出现的语言表述的含义对学生来说是完全不同的。这种语言含义的不同影响着学生对问题的表征和解释，进而影响学生对问题所提要求的理解和解决问题时策略的使用。比较问题与合并问题一样也包含状态间关系，对一个集的数量也不需要转换；它需要以一个集的数量为参照，确定另一集与它的数量关系（如少多少）。

研究还发现，不同的语义结构类型的算术应用题，其难度是不一样的。对儿童来说，转换和合并问题较容易，而比较问题相对较难。

对算术应用题语义结构关系的表征和理解，影响问题解决策略的使用。下面介绍三个算术应用题理解的理论。

一、图式理论

Kintch 和 Greeno 认为，算术应用题的理解包含类似于对课文进行理解的过程，在理解过程中建立心理表征[4]，这是解决算术应用题的基础。不同类型的课文都有其特定的结构，读者以此组织和形成心理表征。如同小说故事是由故事图式组织起来的一样，算术应用题也有它特定的图式。这些图式有：转换图式，部分—整体图式，比较图式。这些图式都是以“集”概念为基础，其实“集”也是一种图式。图式带有框架和槽道，这些框架和槽道由特定的数值和对象所填充。

“集”的框架和槽道如下：

对象：＜可数名词＞

数量：＜数值，一些，许多＞

特性：＜拥有者，地点，时间＞

作用：＜开始，转换，结果；总集，子集；大集，小集，差异集＞

例如，“小明有五个弹子”这个句子，产生一个“集”。其中，小明是拥有者，数量是 5，特性是过去时，其作用依赖于应用题的上下文。它可以作为转换问题的开始集（他将 3 个弹子给了小红，他还剩余多少），或者作为合并问题的子集（小红有 3 个弹子，他们总共有几个弹子），或者是比较问题的大集（他比小红多 2 个弹子，小红有几个弹子）。

图式理解算术应用题的过程如下：

儿童读算术应用题时产生一些“集”，他们用一个更高层次水平的图式将先前的各个集联系起来。当图式遇到一个带数量的名词短语，它就从课文中搜集信息来填充图式的槽道，接着利用课文中的语义信息来选择合适的更高层次水平的图式来组织各集信息。例如，一个包含“比……多”的短语，可以触发（cues）比较图式，转换动词（给，拿，丢等）触发转换图式，“总共”则触发部分—整体图式等。

下面的这个例子具体说明了图式如何理解转换问题：

小明有 3 个弹子。

接着小红给了他一些弹子。

现在小明有 8 个弹子。

小红给了小明多少个弹子？

第一句话触发模型产生 S1 集，数量是 3 个弹子，拥有者是小明，时间是过去时，作用未知。同样，基于第二句话形成 S2 集，对象是弹子，数量为一些，小明是拥有者，时间是后来。更重要的是，“给”触发了转换图式，这使 S1 集被指派为开始集，S2 为转换集，并产生一个期望，希望知道结果集。由第三句产生 S3 集，对象是弹子，数量为 8，拥有者是小明，时间为现在，这是转换后的结果。最后一句话只是要求计算未说明的 S2 集的数量。小学一年级的学生通常采用“补上”（add - on）这种相加的计数方法来完成任务。

支持图式理论的证据来自许多行为实验和计算机模拟实验。研究发现，小学生解决

算术应用题时出现错误是有规律的,解题出现的错误与随后回忆出现的错误类型有很高的一致性。这是因为回忆是在理解的基础上重新建构有关算术应用题心理表征的过程。

Cummins(1988)采用计算机模拟程序,研究小学生在解决算术应用题中出现错误的情况[⑤]。计算机模拟的思路是这样的,小学生解决算术应用题需要一定的认知加工成份,将这些认知成份中的某些部分减去,再来看计算机解题的行为表现。如果减掉某些成份,没有引起计算机解题行为上的变化,说明这些成份是多余的。如果减掉某些成份,导致计算机完全不能解题,说明这些成份是非常重要的。计算机模拟中包含两类不同来源的知识:一类是用来理解算术应用题的有关语言方面的知识和有关世界的知识;另一类是解题所必需的数学知识,如"集"是什么、用来联系各集的更高层次水平的图式、计数的策略等。减掉任何数学方面的知识,都会导致计算机彻底不能解题。在行为实验中,儿童出现一些解题错误,但不是完全不会解题。这说明,影响不同语义结构算术应用题难度的因素不是数学方面的知识。当减掉某些语言知识时,如"总共"、"比……多"等,计算机成功地模拟了小学生解题时出现的错误。所以,小学生在解决算术应用题方面出现的错误,主要是受语言方面因素所影响。由于小学生缺少关于世界的一般知识,而某些应用题中出现的词汇又不是日常生活中经常见到的,那么,这些词汇就会影响应用题的解决。

二、两类加工方式理论

Mayer 提出,在数学问题解决中有四种主要的认知成份——转换(translating)、整合(integrating)、计划(planning)和执行(executing)[⑥]。转换是指建构问题中每一个句子的心理表征,整合是指建构问题所描述的情境的心理表征,计划是指设计问题解决的方案,执行是指完成计划。转换和整合是表征问题和理解问题的认知过程。计划是前两个过程的副产品。学生解决问题的关键在于其对问题的理解过程。

Mayer 进一步指出,学生理解应用题有两种方式:直接转译方式(direct translation approach)和问题情境方式(problem model approach)(Hegarty Mayer,1995)。在直接转译方式中,问题解决者选择问题中的数字和关键的关系术语,如"多"和"少";并从这些关键词发展出解题的计划,如遇到"多"启动加法运算,遇到"少"启动减法运算。所以说,问题解决者试图将问题陈述中的关键命题直接转译为计算集,以便产生答案。直接转译的方式的优点在于它很少依赖记忆,也不需要关于问题类型方面的丰富知识。

在问题情境方式中,问题解决者首先建立问题中每一句话的心理表征,然后建立一个关于问题情境的心理表征。问题情境模型是一种基于对象的表征,而不是基于命题的表征。

我们以下面的问题为例,说明理解过程的核心成份——转换和整合是如何进行的。

在 A 商店每块蛋糕的价钱是 65 分。

这比 B 商店每块蛋糕的价钱少 2 分。

如果你需要 4 块蛋糕。

在 B 商店买需要多少钱?

Mayer 认为两种理解方式对应用题的认知加工过程是:

第一步是建立文本库。在这一步认知加工过程中,对问题的每一个句子进行表征。上述两种方式在这一步的认知加工过程是一样的。算术应用题中文本以逐渐增加的方式被逐句加工。在每一次加工中,问题解决者都阅读了问题中说明某一变量和数值的句子。在建立本文库的过程中,问题解决者必须表征当前句子所表示的命题,并与其他句子所表征的信息相联系。

在表征每个句子的过程中,问题解决者可以运用数学问题中句子类型的知识。Mayer 认为这些知识有:分配——表示某一变量的数值,关系——表示两个变量之间的

数量关系，问题——表示某一未知变量的数值。例如，上面所述的蛋糕问题：

分配1：((等于)在A商店的蛋糕，65分)

关系：((等于)A商店的蛋糕(便宜)B商店的蛋糕，2分)

分配2：((等于)蛋糕的块数，4)

问题：((等于)总的数额，未知)

数量单位的改变也必须作为句子的一部分而被编码。

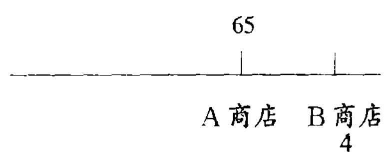
当问题解决者读一个新的句子时，他通过推理将之与先前的文本库联系起来。这种加工依赖对课文理解的一般模型，再参考有关的算术计算方面的知识。例如，前面的蛋糕问题，问题解决者必须认识到第二个句子中的“这”是指第一句中的A商店的蛋糕，第三句中的“块”与第一句和第二句中的“块”是同样的数量单位。总之，问题解决者的首要任务就是把问题中的每一个句子转换成为一个内部的心理表征，并使各个命题在相互联系的基础上形成语义网络表征。

理解的第二步是建立一个连贯的问题表征——整合过程。在这一加工过程中，直接转译方式和问题情境方式是完全不同的。问题解决者在阅读一个问题时，他要在建立文本库和形成连贯的问题表征之间来回加工数次。也就是说，当他每读一个句子时，他要先更新文本，然后更新问题的表征。

在直接转译方式中，整合过程是指加工文本库中的每一命题，以决定这个命题是否包含某些关键事实——数字和一些关键词，如“比……多”、“总共”、“给”等。在转换和整合之间来回加工数次后，问题解决者删除一些不重要的信息。因此，他的问题表征所包含的信息要比原始的文本库少，只包含数字和一些关键词。例如上述蛋糕问题中，问题解决者概括出65分、2分、少、多少和4块这些数字和关键词。

在问题情境方式中，问题解决者以对象为中心，建立一个关于问题情境的心理表征。他在加工命题时必须决定它是不是一个新的对象，或者是否被加工过。问题情境方式同样需要在转换和整合之间来回加工数次，需要利用关于世界的一般知识和有关算术等方面的知识。它可以被看作为以“集”形式出现的一些对象的集合，或者是在一条线段上各对象的排列，这些对象在线段上的位置表征了其数值(Lewis，1989)[7]。线段形式可能更适合于描述上面所举的例子。

例如，在上面的蛋糕问题中，第一个句子给出一个数量——A商店一块蛋糕的价钱，问题解决者要建构一个关于线段的心理表征，并在65分的位置标出A商店。第二句陈述给出了第二个数量——蛋糕在B商店的价格，这个价格比A商店的价格贵2分。因此，问题解决者表征B商店的位置应在A商店的右边2个单位。所以这个问题情境模型由二个对象组成：A商店和B商店(蛋糕的价钱)，以及二者在线段上的相对位置。当他加工第三句话时必须注意到问题中的对象是B商店4块蛋糕，必须在B商店下标记出4。



总之，在整合阶段，人们必须将基于命题的表征转换为基于对象的表征，以建立精细的问题情境表征，从而有利于对问题的理解。相反，当利用直接转译方式时，可能建立一个包含较少、信息贫乏的心理表征。

接下来就是制定解题的计划和执行计划了。

综上所述，转译加工过程旨在将所有的句子表征为一个语义网络，两类不同的理解方式在此阶段的认知加工相同。但是，在整合阶段的认知加工却完全不同。直接转译方式在整合阶段主要是提取数字和关键词，并由此启动算术运算操作。问题情境方式在整合阶段寻求建立一个关于问题所描述情境的心理表征。

实验研究发现，成功的问题解决者一般采用问题情境方式，不成功的问题解决者一般采用直接转译方式。通过眼动实验，研究者发现，成功的问题解决者阅读应用题的时间长于不成功的问题解决者的阅读时间，两类问题解决者用于转译加工的时间相当，但在整合加工阶段所花的时间不同。特别是在不一致的问题中(关键词是“比……多”，但是要用减法。上述蛋糕问题就是一例)，成功的问题解决者比不成功的问题解决者要多做几次反复阅读(重读问题中的细节，包括变量及其关系)。

实验中对被试错误回忆的分析也支持上述理论。在上述理论模型中，给变量分配数值是在转译加工阶段完成的，对变量间关系的加工是在整合阶段完成的。不成功的问题解决者回忆变量间关系时所犯的错误是在数值上所犯的错误的3倍，他们常犯语义错误(将变量间数量大小关系颠倒，将上述蛋糕问题中的价格回忆为A商店蛋糕比B商店贵)；成功的问题解决者常犯文字错误(如将关键词“少”回忆成“多”)，但较少犯语义错误。

三、建构—整合(construction - integration)理论

Kintch和Greeno的图式理论，以及基于此理论的计算机模拟强调自上而下的加工过程。这个理论假定课文中的线索激活了适当的算术图式，以此图式为基础，课文被组织起来，并得到理解，解题程序也由此而产生。如果正确的图式被激活，问题就能得到正确的解决。但是，如果由线索触发图式的规则过于强有力，那么它又缺乏足够的灵活性来适应不同的语言环境。实际上，触发算术图式的线索可能是极其微妙、复杂、不大可靠甚至可能相互矛盾的。理解应该先考虑课文中所有可能并行出现的图式，而不是从线索一下子就得出一个并不成熟的结论，作出关于问题性质的某种假设。

在建构—整合理论模型中，在建构阶段，相关的、合适的成份以及不相关的、不合适的成份都可能得到表征。在整合过程中，模型并行搜集支持各种图式的证据，与上下文相适应的那些成份得到加强，而那些与上下文不相关的和不合适的成份得到抑制，能够满足问题中各种条件约束的图式最终突出出来。尽管应用题中可能有多种甚至是相互矛盾的线索，建构—整合理论完全能够容纳它们。

那么，哪一种理论观点更好呢？我们认为建构—整合理论更好些。虽然很多结果都可以用自上而下的加工观点(图式理论)来解释，然而，我们注意到图式理论认为，用来组织理解和运算的图式是由线索触发的，图式控制后来的认知过程。由于应用题中可能存在多种触发图式的线索信息，而且前后的信息可能不一致，图式理论显然缺乏足够的弹性，难以说明在有多种不一致的线索信息条件下，如何去选择一个适合的解题图式。建构—整合理论则认为儿童是从多个图式中选择一个最合适的图式。事实上，在阅读算术应用题的过程中，儿童需要整合多种线索，往往需要考虑一个以上的图式。

Lewis通过实验，直接支持了建构—整合理论模型[9]。她的实验材料是16道比较类型的算术应用题，所有的问题都有三句话。实验中的应用题有两条线索，其整体结构和关键词或者有利于引导加法运算，或者有利于引导减法运算。一半为一致的问题(关键词“少”、“低”等出现时，应该用减法；关键词为“多”、“高”等时应该用加法)，另一半为不一致的题(例如，John有178厘米高 。他比Tom低10厘米。Tom有多高)。在实验中，她要求被试每读完应用题的一句话，就选择解决这道题应该用加法还是应该用减法。于是，被试形成运算假设的时间进程就可以被记录下来。另一方面，她以建构—整合理论为基础，从理论上计算在读完应用题每一句话后，该题用加法或减法的预期概率。将被试选择加减法运算的实际概率与之比较，如

果两者相符,说明被试对算术应用题的理解确实如建构—整合理论所述的那样。实验结果表明:无论是加法题还是减法题,无论是一致问题还是不一致问题,被试报告用加法或减法的百分数与建构—整合理论预期的概率十分接近。

上述三个关于算术应用题理解的模型,也有其相通之处。图式理论与直接转译方式相似。前者以集图式来表征句子,后者以命题表征句子。在图式理论中由关键词触发高层次水平图式,然后选择运算操作;在直接转译方式中,整合阶段选择关键词和数字,并由此发展解题计划。

问题情境方式与建构—整合理论也很相似。前者有转换和整合两个阶段,后者包括建构和整合两个阶段。问题情境方式中的转换是将课文中的每个句子转换为内部的心理表征,然后形成语义网络表征。这与建构—整合理论中建构阶段的作用相似。问题情境方式中整合需要在转换和整合之间来回加工数次,以便形成连贯的心理表征。这也与建构—整合理论中的整合过程相似。其实,建构—整合理论是一个一般的课文理解的理论模型,问题情境方式理论是针对算术应用题的理解的一个具体的理论模型。上述三个理论,从不同角度、在不程度上说明了儿童解决算术应用题的认知过程,对小学数学教学具有一定的指导意义。

注:

①Capenter, T. P., Corbitt, M. K., Solving Verbal Problems: Results and Implications for National Assessment. Arithmetic Teacher, 1980, 28, 8-12.

②Hudson, T., Correspondence and Numerical Difference between Disjoint Set, Child Development, 1983, 54, 84-89.

③Riley, M. S., Greeno, J. G., Heller, J. I., Development of Children's Problem Solving Ability in Arithmetic, In H. P. Ginsberg(Ed.), The Development of Mathematical Thing. New York: Academic Press, 1983.

④Kintch, W., Greeno, J. G., Understanding and Solving Word Arithmetic Problems, Psychological Review, 1985, Vol 92, No. 1, 109-129.

⑤Cummins, D. D., Kintch, W., The Role of Understanding in Solving Word Problems, Cognitive Psychology, 1988, 20, 405-438.

⑥Hegarty, M., Mayer, R. E., Comprehension of Successful and Unsuccessful Problems Solvers, Journal of Educational Psychology, 1995, Vol 87, No. 1, 18-32.

⑦Lewis, A. B., Training Students to Represent Arithmetic Word Problems, Journal of Educational Psycholygy, 1989, 79, 521-531.

⑧Stern, E., What Makes Certain Arithmetic Word Problems Involving the Comparison of Sets So Difficult for Children? Journal of Educational Psychology, 1993, Vol. 85, No. 1, 7-23.

⑨Kintsch, W., Word Problems, In W. Kintsch (Ed.), Comprehension: A Paradigm for Cognition, Cambridge University Press, 1997, 333-370.

作者单位:中国科学院心理学研究所

邮编:100101

(责任编辑 刘华山)

Teachers' right to punish as a warning is a kind of professional right which can guarantee the normal teaching activity and should enjoy legal protection and supervision. This right has a long evolution from traditional to modern, and has legitimate and rational base for its existence even in today.

With the help of the concept of "MacDonaldation", this paper analyses the advantages and disadvantages of teaching abiding by the model of means rationality. The author thinks it is the four key standards of "priority efficiency", "number managing", "forecastable", "controllable" that make "MacDonaldation" of teaching and non -- manative of teaching. The author analyses how "priority efficiency" makes teaching just seem as the assembly line of producing knowledge and how "number managing" dispels living students and educators with numbers. The paper reveals that "forecastable" course design often encounters "unexpectedness" in the practice of teaching, and "controllable" teaching often encounters "uncontrollable factors", too.

Children's understanding of practical problems is instrumental in solving practical problems in arithmetic. The article briefly introduces some theories on how a child can understand practical problems: schematic theory, construction – integration theory, dual processing style theory. These theories help us to know how a child behaves in solving practical problem in arithmetic.

Because statistical testing has its fatal limitation, scholars in the West criticize it as follows: (1) tests for significance often confound right and wrong; (2) Type Ⅱ errors often mix up black and white; (3) yes-no type decision making often causes much useful information lost; (4) many people has misguided conceptions of statistical testing. Based on these criticisms, a reform movement aiming at classical statistical testing is arising and forming two reform approaches, radical and moderate.

The article carries out a content analysis of 275 reports on teaching experiment published by 54 kinds of educational journals in 20 years and tries to give a fuller picture of developments in teaching experiment in primary and secondary schools, and thinks reflectively from a functional perspective.